

DOI: <https://doi.org/10.33216/1998-7927-2025-293-7-56-66>

УДК 622.7: 534

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ НАДРЕШІТНОГО ПРОДУКТУ ТОНКОГО ВОЛОГОГО ГРОХОЧЕННЯ ЗАЛІЗНОЇ РУДИ

Моркун В.С., Моркун Н.В., Грищенко Я.О., Бобров Є.Ю.

MODELING THE DYNAMICS OF THE OVERFLOW PRODUCT IN FINE WET SCREENING OF IRON ORE

Morkun V.S., Morkun N.V., Hryshchenko Y.O., Bobrov E.Y.

Грохочення або просіювання широко використовується у гірничій промисловості, для розділення частинок руди за крупністю. Величезний обсяг руди на гірничих підприємствах на регулярній основі піддається промислому просіюванню, тому дослідження кінетики процесу та оптимізація відповідної технології, має велике економічне значення. Вирішення зазначеної проблеми ускладнено наявністю багатьох робочих змінних та різноманітних збурюючих факторів, що визначають результати цієї технологічної операції. В першу чергу до них відносяться складний розподіл частинок руди за крупністю та щільністю, а також комплексний вплив на рух надRESHІТНОГО продукту різних динамічних робочих режимів просіваючої поверхні. Останнім часом для класифікації подрібненої руди на збагачувальних підприємствах все більш інтенсивно застосовуються грохоти тонкого вологого грохочення. Застосування для просіювання вологого матеріалу, тверда фаза якого включає частинки руди різної щільності і крупності, накладає додаткові вимоги до конструкції та налаштування відповідного робочого обладнання. При безперервному просіюванні, коли швидкість подачі рудного матеріалу на сито достатньо висока і він створює скупчений шар частинок певної товщини, наприклад, навколо секції подачі, лише частинки в шарі, що безпосередньо контактують з ситом, мають шанс пройти через отвори. Доки верхні шари здатні додавати частинки малого розміру до цього контактного шару, швидкість проходження матеріалу залишатиметься постійною. Коли матеріал рухається вздовж сита, і все більше частинок меншого розміру проходить через отвори, він стає більш диспергованим. При цьому частинки стають більш рухливими та «відокремленими», відбувається перехід від «скупченого» стану до «відокремленого» руху. Зазначені особливості значно ускладнюють задачу

формування ефективного автоматизованого керування цим процесом. Досліджена модель динаміки подрібненого рудного матеріалу на просіювачій поверхні грохота, що враховує адвекцію, дифузію, сегрегацію та перколяцію його частинок у шарі матеріалу. Використаний підхід дозволяє враховувати трансформацію гранулометричного складу частинок твердої фази надRESHІТНОГО продукту та його щільності в процесі руху по ситі грохота і за рахунок цього покращити якість автоматизованого керування процесом.

Ключові слова: керування, автоматизація, грохочення, модель, характеристики, динаміка, вібрація.

Вступ. Розділення (класифікація) руди за крупністю її частинок є невід'ємною складовою технологічного процесу підготовки рудної сировини до металургійного переділку. Одним із поширених методів технічної реалізації такої класифікації є грохочення або просіювання подрібненої руди. Однак прогнозування результатів цієї операції стосовно полідисперсних гранульованих матеріалів у промислових масштабах залишається складною проблемою.

Існує велика кількість факторів, які впливають на стан грохота та ефективність просіювання. Однак у багатьох роботах визначається вирішальний вплив руху дискретних частинок на результати цієї операції [1, 2]. Зазначений фактор включає сегрегацію рудних гранул у шарі матеріалу та умови, за якими малорозмірні частинки наближаються до сита та зрештою проходять через отвори. Крім того, параметри вібрації, конструктивні

особливості та швидкість подачі вхідного матеріалу також впливають на умови просіювання та визначають отримані результати. Параметри вібрації складаються з амплітуди, частоти та кута вібрації. У свою чергу, до конструктивних параметрів відносяться ширина, довжина і нахил грохота, діаметр дроту та розмір отвору сітки.

У роботі [3] представлено результати дослідження механіки зіткнень та проникнення частинок для розуміння руху частинок та покращення теоретичного аналізу процесу просіювання, що поетапно поділяється на розпушення, стратифікацію, зіткнення та проникнення. Проникнення частинок має прямий вплив на ефективність просіювання. Авторами визначена ймовірність проникнення, а математичні залежності між проникненням частинок та параметрами вібрації встановлені за допомогою методу найменших квадратів. Зроблено висновок, що для отримання ідеальної ймовірності проникнення матеріалів амплітуда та частота повинні бути близько 3,0 мм та 25 Гц відповідно. Кут напрямку вібрації має лише незначний вплив на проникнення. Стадія процесу просіювання у часі від 0,1 до 0,7 с є основною областю для зіткнень та проникнення.

Сучасний підхід щодо моделювання багатofазних потоків розглядає рух кожної окремої частинки як наслідок усіх сил, що на неї діють [4]. Це дозволяє враховувати одночасне виникнення різних видів рухів та складний діапазон взаємодій, які можуть виникати між частинками одна з одною, між частинками та стінками, а також між частинками та міжвузловою рідиною. Основна перевага цього методу полягає в тому, що він моделює ефекти на рівні частинок. Відповідно існує менша потреба в глобальних припущеннях, а реакція збірки є прямим результатом моделювання.

Загальна модель грохочення має враховувати ефекти сегрегації, дифузії та адвекції рудного матеріалу в процесі його руху по сити. Структура та динамічна поведінка гранульованих матеріалів є предметом вивчення у геотехнічній інженерії через їх значний вплив на проникність та механічні властивості досліджуваного середовища. Однак, сегрегація частинок, яка спричиняє значні структурні зміни, залишається недостатньо вивченою, особливо щодо її динамічної еволюції як у глобальних, так і в локальних процесах сегрегації [5].

Сегрегація гранульованих матеріалів - це складне явище, яке важко кількісно виміряти та

передбачити. Метод дискретних елементів (DEM) може бути корисним інструментом для прогнозування ефектів сегрегації та підтримки промислового дизайну. У цьому контексті дуже складною задачею є характеристика гранульованих твердих речовин, щоб забезпечити ключові параметри, необхідні для успішного моделювання процесів сегрегації. Тертя кочення, тертя ковзання та коефіцієнт відновлення є критичними параметрами, що потребують вивчення. У роботі [6] представлено експериментальний метод для характеристики сегрегації на вільній поверхні. Досліджено вплив різних властивостей частинок, зокрема форми та розміру, на сегрегацію некогезивних матеріалів. Експерименти показали, що розмір частинок має сильніший вплив на сегрегацію, ніж форма частинок.

У роботі [7] пропонується розглядати полідисперсний сегрегаційний потік при наявності як стаціонарної так і нестаціонарної сегрегації. Крім того застосовується полідисперсний підхід до полідисперсних матеріалів за густиною з однаковим розміром частинок. Прогнози моделі кількісно узгоджуються з експериментально перевіреним моделюванням методом дискретних елементів (DEM) як розмірно-полідисперсних, так і густино-полідисперсних сумішей, що мають рівномірний, трикутний та логарифмічно-нормальний розподіли.

Отже аналіз виконаних досліджень свідчить про визначальний вплив рух частинок матеріалу, що просіюється, на результати цього процесу. Але синтез моделі, що враховує особливості динаміки вологого грохочення подрібненої руди залишається проблемним питанням.

Метою статті є моделювання основних складових руху надрешітного продукту тонкого вологого грохочення руди для покращення якості кінцевого продукту та підвищення ефективності керування цим процесом.

Викладання основного матеріалу. У процесі руху подрібненого рудного матеріалу по просіювачій поверхні відбувається адвекція, дифузія, сегрегація та перколяція його частинок у шарі матеріалу, частинки меншого розміру наближаються до сита і зрештою проходять через отвори [4].

Зміна розподілу частинок за крупністю на ситі під час перехідного процесу просіювання змінює склад матеріалу в різних шарах і зрештою впливає на загальну ефективність просіювання.

Отже моделювання динаміки руху матеріалу в процесі його просіювання має враховувати у потоці визначальне співвідношення рудного матеріалу кожного класу крупності [8]. З урахуванням цього відповідна модель процесу у частинних похідних виглядає наступним чином [9]

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}c_i) + \nabla \cdot \Phi_i = \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla c_i), \quad (1)$$

де $\nabla \cdot (\mathbf{u}c_i)$ - адвекція; $\nabla \cdot \Phi_i$ - сегрегація; $\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla c_i)$ - дифузія; c_i - концентрація i -го класу крупності частинок подрібненої руди; t - час; $\mathbf{u}$ - поле швидкості; $\mathbf{D}$ - тензор зіткнювальної дифузії.

Оскільки сегрегаційний потік будь-якого класу крупності i залежить від концентрації іншого класу j , ці рівняння пов'язані. Для різних полів потоку, система координат орієнтована так, що вісь x спрямована вздовж схилу потоку (вниз по схилу), вісь y - вздовж розмаху, вісь z - нормально до вільної поверхні, а швидкості $\mathbf{u} = (u, v, w)$ відповідають напрямкам $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Для розв'язання цього набору рівнянь необхідно задати початкові умови, граничні умови потоку, поле швидкості $\mathbf{u}$, дифузію $\mathbf{D}$ та сегрегаційний потік Φ .

Першу складову рівняння (1) - дифузію частинок рудного матеріалу в процесі його руху по сити, доцільно розглядати, як однорідну крайову задачу. Загальне рівняння дифузії має такий вигляд

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad a \leq x \leq b. \quad (2)$$

Початковою умовою є $c(x, 0) \leq c_0$, а крайовою умовою - $c(0, t) \leq 0$, $c(L, t) \leq 0$.

Використаний для моделювання дифузії метод скінченних різниць дає наближення $c_t^n \in R^n$ до розв'язку $c(x_i, t_n)$ у дискретних точках [10]

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3)$$

$$t_n = nk, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

де $h \equiv \Delta x$ - ширина сітки у просторі; $k \equiv \Delta t$ - крок за часом.

Наближення до першої похідної за часом визначаються виразом

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + \sigma(\Delta t). \quad (5)$$

Дискретизація $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ отримується з центральної різниці другого порядку в просторі

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \approx \frac{c_{i-1}^n - 2c_i^n + c_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \sigma(\Delta x^2). \quad (6)$$

Відповідно

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = D \frac{c_{i-1}^n - 2c_i^n + c_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \sigma(\Delta t + \Delta x^2). \quad (7)$$

У спрощеному варіанті

$$c_i^{n+1} = \lambda c_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) c_i^n + \lambda c_{i+1}^n, \quad (8)$$

де $\lambda = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$.

Розв'язок у новий момент часу, за умов $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$, є середньозваженим розв'язком у старий момент часу. Це означає, що якщо $c_{i+1}^n - c_i^n$ для всіх i , тобто [10]

$$\begin{aligned} c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1} &= \lambda(c_i^n - c_{i-1}^n) + \\ (1 - 2\lambda)(c_{i+1}^n - c_i^n) &+ \lambda(c_{i+2}^n - c_{i+1}^n) > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Рішення рівняння (2) реалізовано із застосування можливостей платформи Simulink® /MATLAB® [11,12].

На рис. 1 наведено графіки у безрозмірній формі параметрів (зміна відносно первісного значення) еволюції дифузії частинок подрібненої руди класу крупності c_i в їх шарі на поверхні сита.

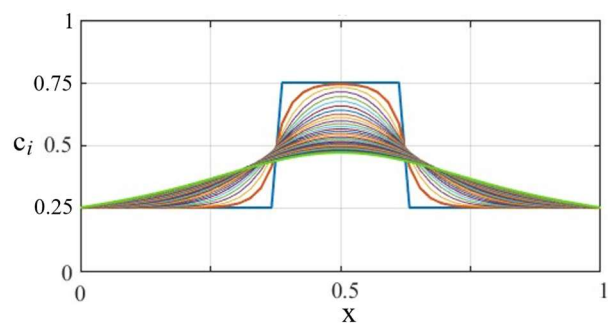


Рис. 1. Розвиток дифузії частинок рудного матеріалу класу крупності c_i в їх шарі на поверхні сита у часі.

Друга складова рівняння (1) - адвекція, визначає механізм перенесення рудного матеріалу шляхом його об'ємного руху. Властивості цього матеріалу переносяться разом з ним. Лінійне рівняння адвекції має вигляд

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (10)$$

з початковою умовою

$$c(x, t = 0) = f(x). \quad (11)$$

Рівняння (10) описує процес поширення форми хвилі зі швидкістю u , точно зберігаючи її початкову форму.

Розв'язок рівнянь (10) та (11) має вигляд [13]

$$c(x, t) = U(\xi) = f(x - ut); \quad \xi = x - ut. \quad (12)$$

Комбінований вплив нелінійної адвекції та дифузії на потік частинок подрібненої руди змодельований із застосуванням лінійного диференціального рівняння у частинних похідних

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0, \quad (13)$$

де $u \frac{\partial c}{\partial x}$ - лінійний адвекційний член; $D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ - дифузійний член; $D, u > 0$.

Для початкової умови виду

$$c(x, 0) = Ue^{ikx} \quad (14)$$

та припущеного розв'язку виду $c(x, t) = f(t)e^{ikx}$, розв'язок (13) отримується шляхом підстановки.

Таким чином, маємо [13,14]

$$c(x, t) = Ue^{-Dk^2t} e^{ik(x-ut)}. \quad (15)$$

Розв'язок рівняння (15) у графічній формі для випадку, коли початкова концентрація c_i не змінюється (постійний потік вхідного матеріалу), наведено на рис. 2.

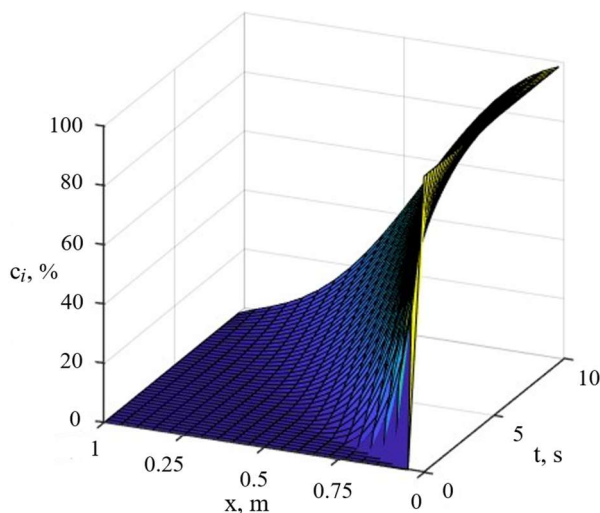


Рис. 2. Просторовий розв'язок рівняння адвекції-дифузії

Наведене рішення представляє собою дифузійну біжучу хвилю. Зокрема, елемент $e^{ik(x-ut)}$ описує гармонічну біжучу хвилю праворуч з хвильовим числом k та фазовою швидкістю u , а коефіцієнт Ue^{-Dk^2t} визначає спадаючу амплітуду.

Аналітичне рішення (13) можна отримати для початкової умови виду

$$c(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x > 0 \end{cases}. \quad (16)$$

Фронт хвилі рухається праворуч зі швидкістю u , і його профіль втрачає свою різкість під впливом коефіцієнта дифузії D . Для достатньо малих значень часу можна задати такі граничні умови

$$c(-L/2, t) = 1, \quad c(L/2, t) = 0. \quad (17)$$

Використовуючи метод розділення змінних з (16), як початковою умовою, та (17), як граничними умовами, можна знайти точний розв'язок [14]

$$c(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[2n - \frac{\pi(x-ut)}{L} \right] \frac{e^{-D(2n-1)^2\pi^2t/L^2}}{2n-1} \quad (18)$$

Третя складова рівняння (1) - сегрегація, обумовлена властивістю твердих частинок розділятися у просторі залежно від їхніх фізичних характеристик. Це явище широко зустрічається майже на всіх стадіях переробки рудних матеріалів і досить часто призводить до значних коливань якості кінцевих продуктів.

Вважається, що основними механізмами сегрегації сухих та вологих подрібнених матеріалів є: кочення, просіювання, ефекти відштовхування, ефекти кута природного укусу, перколяція, зміщення, ефекти траєкторії руху, ефекти повітряного потоку, ефекти аерації та флюїдизації, ефекти удару [15].

Ефекти кочення та просіювання домінують у сегрегації купи. Більші частинки, що котяться по поверхні купи, створюють не засліплюючий екран, через який пробиваються менші частинки. Цей процес триває до вичерпання запасу дрібних частинок або доки більші частинки не зупиняться.

Ефект відштовхування найімовірніше виникає там, де задіяні частинки різної щільності. Наприклад, коли верхня частинка має вищу щільність, ніж дві нижні, вона прагне їх

відштовхнути. Це призводить до куп, де важчі частинки осідають поблизу центру купи, а легші біля стінки.

Вплив кута природного укусу виникає при змішуванні матеріалів. У цій операції дрібний продукт (менший кут природного укусу) та інший, більш грубий з більшим кутом природного укусу, засипають партіями, утворюючи купу для змішування. Коли до купи з продукту з великим кутом природного укусу додають наступну партію продукту з малим кутом природного укусу, то його частинки скочуються до краю купи.

Процеси перколяції та зміщення пояснюється вібраціями, що змушують частинки рухатися у товщі матеріалу, що вони утворюють. Зокрема, у роботі [16] стверджується, що спонтанна перколяція під дією сил тяжіння, відбувається при співвідношенні діаметрів частинок менше 0,1547 у бінарній сухій суміші. Це сприяє міграції невеликих частинок через шар більших частинок. Співвідношення розмірів, форма та шорсткість поверхні сприяють швидкості перколяції. Також перколяція залежить від загальної деформації та її швидкості при зіткненні частинок. Зміщення частинок різних розмірів відбувається завдяки створенню аномальних умов упаковки дрібних частинок навколо великої частинки під дією змін параметрів вібрації. Вважається, що перколяція та просіювання сухих сумішей дають подібні ефекти, але для перколяції не потрібен рухомий шар матеріалу [17].

Траєкторна сегрегація обумовлює те, що більші частинки, падаючи, наприклад, в процесі руху з похилого жолоба, розлітаються далі від кінця жолоба, ніж менші. Траєкторна сегрегація може посилюватися таким ефектами, як просочування або тертя.

Ефект повітряного потоку виникає, коли центрально у високий силос завантажують подрібнений продукт. Його частинки спричиняють потік повітря навколо потоку матеріалу, що падає. Якщо матеріал містить значну кількість дрібних частинок (10-100 мкм), вони будуть переноситися потоком повітря до бокової частини силосу, залишаючи центральну частину багатшим на грубіший матеріал.

Ефект аерації пов'язаний з властивістю твердих частинок утворювати флокули з повітряними пухирцями. Наслідком цього є те, що грубі частинки падають крізь шар (струм), тоді як аерований шар дрібних частинок залишається на поверхні і рухається вгору.

Сегрегація внаслідок удару відбуваються, коли частинки рухаються. Існують як міжчастинкові удари, так і удари між частинками та межами системи. Такі зіткнення або зупиняють дрібні частинки, або збільшують їхню швидкість. Це призводить до того, що дрібні частинки розподіляються по більшій площі, ніж грубі частинки.

Серед зазначених динамічних ефектів механічної взаємодії частинок слід звернути увагу на те, що різноманітні механізми сегрегації зазвичай діють різноспрямовано. Який з них буде домінувати в будь-якій даній ситуації, залежить від великої кількості параметрів. Ці параметри залежать як від природи частинок, так і від змінних процесу [18]. До них відносяться такі властивості частинок: розмір та розподіл розмірів, щільність, форма, модуль пружності, коефіцієнт тертя, текстура поверхні, когезивність, адгезія. Змінні процесу: швидкість подачі або заповнення, висота падіння, вплив розміру купи, співвідношення змішування, вплив вологості.

Наявність та властивості рідини (наприклад, щільність та в'язкість) у гранульованих потоках мають значний вплив на динаміку твердих частинок [19, 20]. Моделі сегрегації в сухих та вологих системах схожі, але сегрегація відбувається швидше у вологому випадку [8].

Математично сегрегація, тобто еволюція концентрації частинок певної крупності, може бути задана диференціальним рівнянням [9]

$$\Phi_i = u_p c_i, \quad (19)$$

де u_p – швидкість сегрегації чи перколяції.

Рівняння (1) набуває простої форми у гравітаційно-керованих потоках з вільною поверхнею, коли домінує потік сегрегації, нормальний до поверхні [21]. У цьому випадку дифузія суттєва лише в напрямку z , а глибина проточного шару значно менша за довжину потоку.

У випадку мультідисперсної структури з N різних частинок рівняння (1) перетворюється на набір з $N - 1$ диференціальних рівнянь у частинних похідних для $c_1 \dots c_{N-1}$, де $c_N = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} c_i$, коли об'ємна частка суміші є постійною.

За таких обставин швидкість сегрегації одного класу крупності в суміші з частинок різного розміру можна описати таким чином [22]

$$\omega_{\rho,i} = \dot{\gamma} \sum_{j \neq i} S_{i,j} c_j, \quad (20)$$

де кожен $S_{i,j}$ є шкалою довжини сегрегації для бідисперсної суміші частинок i та j [23]. Коли ця форма використовується для швидкості перколяції, рівняння (1) стає

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial(u c_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega c_i)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (\dot{\gamma} c_i \sum_{j \neq i} S_{i,j} c_j) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial c_i}{\partial z} \right) \right) \right]. \quad (21)$$

Модель (20) можна включити до загального опису з точки зору щільності ймовірності $c(\mathbf{x}, t, \alpha)$, де α неперервна змінна, що описує відповідну властивість частинки (наприклад, розмір або щільність) [23]. Виходячи з випадку мультидисперсного (дискретного розподілу), швидкість сегрегації по нормалі до поверхні знову можна моделювати як суперпозицію швидкостей для всіх видів

$$\omega_{\rho}(\alpha) = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} S(\alpha, \beta) \dot{\gamma} c(\mathbf{x}, t, \beta) d\beta, \quad (22)$$

де $S(\alpha, \beta)$ - безперервна функція, визначена на основі сегрегації окремих бідисперсних сумішей.

Таким чином, рівняння (1) стає [9]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} c) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} S(\alpha, \beta) \dot{\gamma} c(\mathbf{x}, t, \beta) c(\mathbf{x}, t, \alpha) d\beta = \\ & \nabla \cdot (D \nabla c) \end{aligned} \quad (23)$$

Маючи відомі кінематичні характеристики потоку та конститутивні моделі для швидкості сегрегації та дифузії, моделі континуальної адвекції-дифузії-сегрегації для різних сумішей та з різними типами дисперсності частинок (наприклад, розмір, щільність та форма) можуть бути розв'язані в різних геометріях. Якщо, наприклад, припустити, що швидкість перколяції для частинок (змінюються лише за однією властивістю) задається виразом

$$\omega_{\rho,i} = \sum_{j \neq i} f[R_{\alpha}(i, j) c_j, \mathbf{u}], \quad (24)$$

де $f[R_{\alpha}(i, j) c_j, \mathbf{u}]$ описує бідисперсну суміш двох видів, i та j , зі співвідношенням $R_{\alpha}(i, j) = \alpha_i/\alpha_j$ властивості α при концентрації c_j та місцевих умовах потоку, визначених $\mathbf{u}$.

Тоді, для мультидисперсної суміші, де кожна речовина має різні фізичні властивості [8,9]

$$\omega_{\rho,i} = \sum_{j \neq i} c_j \sum_{\alpha} f[R_{\alpha}(i, j) c_j, \mathbf{u}]. \quad (25)$$

Для визначення параметрів сегрегації використовуються різні підходи, включаючи підгонку загальної швидкості сегрегації до аналітичних рішень [24], визначення миттєвої швидкості сегрегації як функції локальних властивостей потоку [25] та ін.

Для спрощення моделювання цих процесів застосовано математичне формулювання, яке зазвичай використовується для опису операцій розпаду та деградації [26]. Коли рудна суспензія завантажується на сито грохота відбувається декілька взаємопов'язаних процесів: матеріал просувається по ситі, відбувається поступове зневоднення, зменшення маси надрешітного продукту на одиницю довжини сита та збільшення його щільності. За рахунок вибіркового проходження частинок твердої фази через сито, а також руйнування рудних агрегацій змінюється її гранулометричний склад. Тобто можна вважати, що у відповідній моделі процесу у часі частина надрешітного продукту зникає, а частина змінює свої параметри, тобто перетворюється. Такий підхід визнає втрати маси q матеріалу пропорційними ступеню концентрації c

$$q = -\lambda c^n, \quad (26)$$

де n - порядок перетворення; λ - константа перетворення.

Конкретне значення λ залежить від усіх змінних середовища системи, що розглядається. Член втрати маси q , заданий формулою (26), підставляється в загальне рівняння (1) замість сегрегаційного потоку Φ

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla c_i) - \nabla \cdot (\mathbf{u} c_i) - \lambda c_i^n. \quad (27)$$

Окремо ж ця складова визначається виразом

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\lambda c^n. \quad (28)$$

Випадок, коли втрати пропорційні концентрації відповідає $n = 1$, і розв'язок диференціального рівняння (28) становить

$$c = c_0 \exp(-\lambda t), \quad (29)$$

де $c_0 = c(t = 0)$ - початкова умова.

Як було наведено вище, гранулометричний склад надрешітного продукту та швидкість його зміни визначаються режимними параметрами процесу, до яких відносяться характеристики продукту і технологічні змінні. Фактично, відповідним чином сформований режим можна розуміти як спрощене правило, за яким зібрано взаємодію кількох складних процесів, і де λ – це зосереджений параметр, що їх визначає.

Диференціальне рівняння для стаціонарного стану отримується шляхом встановлення похідних за часом у рівнянні переносу (27) рівними нулю

$$\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial c_i}{\partial x} - u \frac{\partial c_i}{\partial x} - \lambda c_i = 0. \quad (30)$$

Для аналітичного розв'язання диференціального рівняння (30) доречно записати його в іншій формі [26]

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mu_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mu_2\right) = 0. \quad (31)$$

Параметри μ_1 та μ_2 отримуються шляхом порівняння коефіцієнтів у (30) та (31)

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{u}{D}, \quad \mu_1 \cdot \mu_2 = -\lambda/D. \quad (32)$$

В результаті отримуємо квадратне рівняння, яке має розв'язки

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2D} (u \pm \sqrt{u^2 + 4\lambda D}). \quad (33)$$

Тоді формула для загального розв'язку має вигляд

$$c(x) = \exp(\mu_2 x) (C_1 + C_0 \int \exp(\mu_1 x) \exp(-\mu_2 x) dx) = C_1 \exp(\mu_2 x) + \frac{C_0}{\mu_1 - \mu_2} \exp(\mu_1 x), \quad (34)$$

де C_1 – друга константа інтегрування.

Як C_0 , так і C_1 визначаються граничними умовами. Звичайна умова на вході $c(x = 0) = c_{in}$ призводить до виразів

$$C_1 + C_0/(\mu_1 - \mu_2) = c_{in} \text{ або } C_1 = c_{in} - C_0/(\mu_1 - \mu_2). \quad (35)$$

У безрозмірній формі розв'язок (34) можна записати як [26]

$$\frac{c(\tilde{x})}{c_{in}} = \tilde{C}_0 \exp(\tilde{\mu}_1 \tilde{x}) + 1 - \tilde{C}_0 \exp(\tilde{\mu}_2 \tilde{x}), \quad (36)$$

з безрозмірною координатою $\tilde{x} = \frac{x}{L}$, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 L$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 L$ та однією константою інтегрування $\tilde{C}_0$.

В процесі досліджень моделювався процес руху первинної маси рудного матеріалу по поверхні сита. Гранулометричний склад рудного матеріалу задавався вмістом частинок подрібненої руди крупністю 150, 106, 74 та 45 мкм. Визначалась зміна щодо координати x/L концентрації відповідного класу крупності c_i відносно до його вхідного значення c_{in} у масі пульпового продукту, який завантажувався на поверхню сита. Моделювалась зміна масової концентрації твердої фази у вхідному продукті від 20 до 40%.

На рис. 3 наведено результати моделювання у середовищі MATLAB® зміни концентрації зазначених класів крупності руди у надрешітному продукті при грохоченні на ситі з розміром отвору 74 мкм.

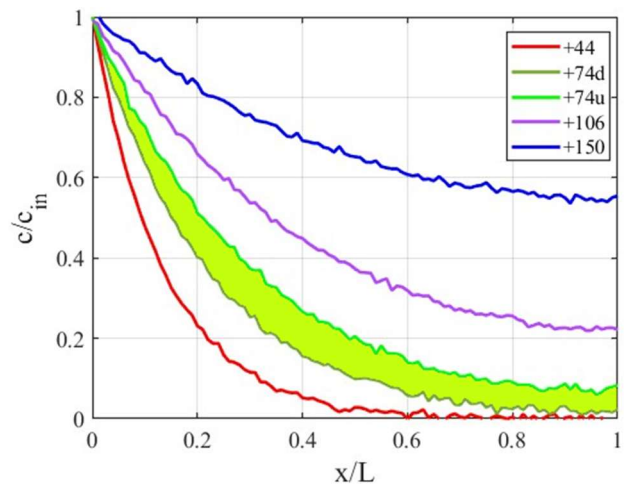


Рис. 3. Результати моделювання зміни концентрації визначених класів крупності руди у надрешітному продукті грохота

Для рудного матеріалу крупністю 74 мкм зеленим сектором визначено вплив зміни масової концентрації твердої фази у вхідному продукті з 20% (+74d) до 40% (+74u).

Аналіз наведеного підходу показав, що його застосування дозволяє змодельовати практично усю можливу динаміку рудного матеріалу під час його руху по ситі грохота та виходячи з отриманих результатів сформулювати відповідну стратегію автоматизованого керування процесом [27, 28].

Висновки. Динаміку подрібненого рудного матеріалу на просіювачій поверхні грохота визначають адвекція, дифузія, сегрегація та перколяція його частинок у шарі матеріалу. В результаті цих процесів його частинки наближаються до поверхні сита і зрештою частина з них проходять через отвори.

Досліджена модель дозволяє враховувати трансформацію гранулометричного складу частинок твердої фази надрешітного продукту та його щільності в процесі руху по сити грохота. Дисперсність крупності та щільності матеріалу, що просіюється, враховуються одним і тим самим співвідношенням. Механізми сегрегації частинок у шарі подрібненої руди, як правило, мають різноспрямований та різношвидкісний характер. Зменшення концентрації твердої фази у вхідному продукті сприяє підвищенню швидкості просіювання але зменшую продуктивність процесу. Збільшення швидкості просторового руху частинок у шарі подрібненої руди сприяє покращенню їх перколяції та збільшую вірогідність проходження через отвори сита. Особливо важливим є те, що це стосується частинок (у тому числі – складної форми), крупність яких наближена до розміру отворів.

У дослідженій моделі використано параметр, який у зосередженій формі представляє сукупність змінних, що визначають робочі режими грохота. Такий підхід дозволяє розглядати стратегію автоматизованого керування процесом грохочення руди, як послідовність операцій визначення робочих режимів та формування керуючих дій, що їм відповідають у просторі та часі.

Напрямок подальших досліджень слід вважати формування на основі дослідженої моделі такого руху частинок подрібненої руди на ситі, який забезпечить покращення якості кінцевого продукту та підвищення ефективності грохочення.

Література

1. Wang Z., Liu C., Wu J., Jiang H., Zhao Y. Impact of screening coals on screen surface and multi-index optimization for coal cleaning production. *Journal of Cleaner Production*. 2018. Vol. 187. P. 562-575. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.03.238>.
2. Wang G, Tong X. Screening efficiency and screen length of a linear vibrating screen using DEM 3D simulation. *Mining Science and Technology (China)*. 2011. Vol. 21, No. 3. P. 451-455. <https://doi.org/10.1016/j.mstc.2011.05.026>.
3. Li Z., Tong X. A study of particles penetration in sieving process on a linear vibration screen. *Int J Coal Sci Technol*. 2015. Vol. 2, P. 299–305. <https://doi.org/10.1007/s40789-015-0089-7>.
4. Li J., Webb C., Pandiella S.S., Campbell G.M. Discrete particle motion on sieves - a numerical study using the DEM simulation. *Powder Technology*. 2003. Vol. 133, No. 1-3. P. 190-202. [https://doi.org/10.1016/S0032-5910\(03\)00092-5](https://doi.org/10.1016/S0032-5910(03)00092-5).
5. Dai Sheng Zhang, Feng Gao, Xuzhen He, Daichao Sheng. Investigation of particle segregation in a vertically vibrated binary mixture: Segregation process and mechanism. *Computers and Geotechnics*. 2024. Vol. 169. P.106236. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2024.106236>.
6. Combarros M., Feise H. J., Zetzener H., Kwade A. Segregation of particulate solids: Experiments and DEM simulations. *Particuology*. 2014. Vol. 12. P. 25-32. <https://doi.org/10.1016/j.partic.2013.04.005>.
7. Deng Z., Umbanhowar P.B., Ottino J.M., Lueptow R. M. Modeling segregation of polydisperse granular materials in developing and transient free-surface flows. *American Institute of Chemical Engineers AIChE Journal*. 2019. Vol. 65. P. 882–893. <https://doi.org/10.1002/aic.16514>.
8. Fan Y., Schlick C.P., Umbanhowar P.B., Ottino J.M., Lueptow R.M. Modelling size segregation of granular materials: the roles of segregation, advection and diffusion. *Journal of Fluid Mechanics*. 2014. Vol. 741. P. 252-279. DOI:10.1017/jfm.2013.680.
9. Umbanhowar P.B., Lueptow R. M. and Ottino J.M. Modeling Segregation in Granular Flows. *Annual Review of Chemical and Biomolecular Engineering*. 2019. Vol. 10. P. 129-153. <https://doi.org/10.1146/annurev-chembioeng-060718-030122>.
10. Rahaman M. M., Sikdar M.M.H., Hossain M. B., Rahaman M.A., Jamal M. Hossain. Numerical solution of diffusion equation by finite difference method. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)*. 2015.Vol. 11, No. 6 Ver. IV. P. 19-25. www.iosrjournals.org. DOI: 10.9790/5728-11641925.
11. Martinec D. MATLAB Central File Exchange. WaveBox. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/51958-wavebox>. 2025.
12. Shankar S. Diffusion in 1D and 2D. MATLAB Central File Exchange. 2025.
13. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38088-diffusion-in-1d-and-2d>.
14. Graham W., Griffiths W., Schiesser E. *Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations: Numerical and Analytical Methods with MATLAB and Maple*. Elsevier Science. 2012. ISBN: 978-0-12-384652-5.
15. Salih A., *Burgers' Equation*. Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram.

2016. https://iist.ac.in/sites/default/files/people/IN08026/Burgers_equation_viscous.pdf.
16. Mosby J., De Silva S. R., Enstad G.G. Segregation of Particulate Materials – Mechanisms and Testers. *KONA Powder and Particle Journal*. 1996. Vol. 14. P. 31-43. DOI:10.14356/kona.1996008.
 17. Bridgwater J., Ingram N.D. Rate of Spontaneous Interparticle Percolation. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*. 1971. Vol. 49. P. 163-169. ISSN: 0046-9858.
 18. Williams J.C. The Segregation of Powders and Granular Materials. A Review. *Powder Technology*. 1963. Vol. 15, No. 2. P. 245-251. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(76\)80053-8](https://doi.org/10.1016/0032-5910(76)80053-8).
 19. Mosby J. Segregation of Particulate Solids: Processes, Mechanisms and Counteractions. Tel-Tek report no. 43003-2, 1994.
 20. Liu P.Y., Yang R.Y. & Yu A.B. The effect of liquids on radial segregation of granular mixtures in rotating drums. *Granular Matter*. 2013. Vol. 15. P. 427–436. <https://doi.org/10.1007/s10035-013-0392-1>.
 21. Fiedor S.J., Umbanhowar P., Ottino J.M. Effects of fluid viscosity on band segregation dynamics in bidisperse granular slurries. *Physical Review E*. 2007. Vol. 76. P. 041303. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.041303>.
 22. Deng Z., Umbanhowar P. B., Ottino J.M., Lueptow R. M. Continuum modelling of segregating tridisperse granular chute flow. *Proceedings of the royal Society A*. 2018. Vol. 474, No. 2211. <http://doi.org/10.1098/rspa.2017.0384>.
 23. Gray J.M.N.T., Ancey C. Multi-component particle-size segregation in shallow granular avalanches. *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. Vol. 678. P. 535-588. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.138>.
 24. Schlick C.P., Isner A.B., Freireich B.J., et al. A continuum approach for predicting segregation in flowing polydisperse granular materials. *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 797. P. 95-109. doi:10.1017/jfm.2016.260.
 25. Thornton A., Weinhart T., Luding S., Bokhove O. Modeling of particle size segregation: calibration using the discrete particle method. *International Journal of Modern Physics C*. 2012. Vol. 23, No. 08, P.1240014. <https://doi.org/10.1142/S0129183112400141>.
 26. Zhao Y., Xiao H., Umbanhowar P.B., Lueptow R. M. Simulation and modeling of segregating rods in quasi-2D bounded heap flow. *American Institute of Chemical Engineers. AIChE J.* 2017. Vol. 64. P. 1550–1563. <https://doi.org/10.1002/aic.16035>.
 27. Holzbecher E. *Environmental Modeling Using MATLAB R*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2007. P. 392. ISBN 978-3-540-72936-5.
 28. Morkun V. S., Morkun N. V., Hryshchenko S. M., Shashkina A. A. & Bobrov E. Y. General principles of formalization of technological process control of mining production in a dynamic distributed system. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2024. Vol. 4. P. 210–221. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2024-4-20>.
 29. Моркун В.С., Моркун Н.В., Грищенко С.М., Грищенко Я.О. Моделювання комбінованого електромагнітного та електромеханічного приводу грохота для підвищення його ефективності. *Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля*, м. Київ. 2025. Вип. 287, № 1. С. 46-56. <https://doi.org/10.33216/1998-7927-2025-287-1-46-56>.

References

1. Wang Z., Liu C., Wu J., Jiang H., Zhao Y. Impact of screening coals on screen surface and multi-index optimization for coal cleaning production. *Journal of Cleaner Production*. 2018. Vol. 187. P. 562-575. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.03.238>.
2. Wang G, Tong X. Screening efficiency and screen length of a linear vibrating screen using DEM 3D simulation. *Mining Science and Technology (China)*. 2011. Vol. 21, No. 3. P. 451-455. <https://doi.org/10.1016/j.mstc.2011.05.026>.
3. Li Z., Tong X. A study of particles penetration in sieving process on a linear vibration screen. *Int J Coal Sci Technol*. 2015. Vol. 2, P. 299–305. <https://doi.org/10.1007/s40789-015-0089-7>.
4. Li J., Webb C., Pandiella S.S., Campbell G.M. Discrete particle motion on sieves - a numerical study using the DEM simulation. *Powder Technology*. 2003. Vol. 133, No. 1-3. P. 190-202. [https://doi.org/10.1016/S0032-5910\(03\)00092-5](https://doi.org/10.1016/S0032-5910(03)00092-5).
5. Dai Sheng Zhang, Feng Gao, Xuzhen He, Daichao Sheng. Investigation of particle segregation in a vertically vibrated binary mixture: Segregation process and mechanism. *Computers and Geotechnics*. 2024. Vol. 169. P.106236. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2024.106236>.
6. Combarros M., Feise H. J., Zetzener H., Kwade A. Segregation of particulate solids: Experiments and DEM simulations. *Particuology*. 2014. Vol. 12. P. 25-32. <https://doi.org/10.1016/j.partic.2013.04.005>.
8. Deng Z., Umbanhowar P.B., Ottino J.M., Lueptow R. M. Modeling segregation of polydisperse granular materials in developing and transient free-surface flows. *American Institute of Chemical Engineers AIChE Journal*. 2019. Vol. 65. P. 882–893. <https://doi.org/10.1002/aic.16514>.
9. Fan Y., Schlick C.P., Umbanhowar P.B., Ottino J.M., Lueptow R.M. Modelling size segregation of granular materials: the roles of segregation, advection and diffusion. *Journal of Fluid Mechanics*. 2014. Vol. 741. P. 252-279. DOI:10.1017/jfm.2013.680.
10. Umbanhowar P.B., Lueptow R. M. and Ottino J.M. Modeling Segregation in Granular Flows. *Annual Review of Chemical and Biomolecular*

- Engineering. 2019. Vol. 10. P. 129-153. <https://doi.org/10.1146/annurev-chembioeng-060718-030122>.
11. Rahaman M. M., Sikdar M.M.H., Hossain M. B., Rahaman M.A., Jamal M. Hossain. Numerical solution of diffusion equation by finite difference method. IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM). 2015. Vol. 11, No. 6 Ver. IV. P. 19-25. www.iosrjournals.org. DOI: 10.9790/5728-11641925.
 12. Martinec D. MATLAB Central File Exchange. WaveBox. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/51958-wavebox>. 2025.
 13. Shankar S. Diffusion in 1D and 2D. MATLAB Central File Exchange. 2025.
 14. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38088-diffusion-in-1d-and-2d>.
 15. Graham W., Griffiths W., Schiesser E. Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations: Numerical and Analytical Methods with MATLAB and Maple. Elsevier Science. 2012. ISBN: 978-0-12-384652-5.
 16. Salih A., Burgers' Equation. Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram. 2016. https://iist.ac.in/sites/default/files/people/IN08026/Burgers_equation_viscous.pdf.
 17. Mosby J., De Silva S. R., Enstad G.G. Segregation of Particulate Materials – Mechanisms and Testers. KONA Powder and Particle Journal. 1996. Vol. 14. P. 31-43. DOI:10.14356/kona.1996008.
 18. Bridgwater J., Ingram N.D. Rate of Spontaneous Interparticle Percolation. Transactions of the Institution of Chemical Engineers. 1971. Vol. 49. P. 163-169. ISSN: 0046-9858.
 19. Williams J.C. The Segregation of Powders and Granular Materials. A Review. Powder Technology. 1963. Vol. 15, No. 2. P. 245-251. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(76\)80053-8](https://doi.org/10.1016/0032-5910(76)80053-8).
 20. Mosby J. Segregation of Particulate Solids: Processes, Mechanisms and Counteractions. Tel-Tek report no. 43003-2, 1994.
 21. Liu P.Y., Yang R.Y. & Yu A.B. The effect of liquids on radial segregation of granular mixtures in rotating drums. Granular Matter. 2013. Vol. 15. P. 427-436. <https://doi.org/10.1007/s10035-013-0392-1>.
 22. Fiedor S.J., Umbanhowar P., Ottino J.M. Effects of fluid viscosity on band segregation dynamics in bidisperse granular slurries. Physical Review E. 2007. Vol. 76. P. 041303. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.041303>.
 23. Deng Z., Umbanhowar P. B., Ottino J.M., Lueptow R. M. Continuum modelling of segregating tridisperse granular chute flow. Proceedings of the royal Society A. 2018. Vol. 474, No. 2211. <http://doi.org/10.1098/rspa.2017.0384>.
 24. Gray J.M.N.T., Ancey C. Multi-component particle-size segregation in shallow granular avalanches. Journal of Fluid Mechanics. 2011. Vol. 678. P. 535-588. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.138>.
 25. Schlick C.P, Isner A.B, Freireich B.J, et al. A continuum approach for predicting segregation in flowing polydisperse granular materials. Journal of Fluid Mechanics. 2016. Vol. 797. P. 95-109. doi:10.1017/jfm.2016.260.
 26. Thornton A., Weinhart T., Luding S., Bokhove O. Modeling of particle size segregation: calibration using the discrete particle method. International Journal of Modern Physics C. 2012. Vol. 23, No. 08, P.1240014. <https://doi.org/10.1142/S0129183112400141>.
 27. Zhao Y., Xiao H., Umbanhowar P.B., Lueptow R.M. Simulation and modeling of segregating rods in quasi-2D bounded heap flow. American Institute of Chemical Engineers. AIChE J. 2017. Vol. 64. P. 1550-1563. <https://doi.org/10.1002/aic.16035>.
 28. Holzbecher E. Environmental Modeling Using MATLAB R. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2007. P. 392. ISBN 978-3-540-72936-5.
 29. Morkun V. S., Morkun N. V., Hryshchenko S. M., Shashkina A. A. & Bobrov E. Y. General principles of formalization of technological process control of mining production in a dynamic distributed system. Radio Electronics, Computer Science, Control. 2024. Vol. 4. P. 210-221. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2024-4-20>.
 30. Morkun V. S., Morkun N. V., Hryshchenko S. M., Hryshchenko Y.O. Modeling of a combined electromagnetic and electromechanical drive for a screen to increase its efficiency. Bulletin of the Volodymyr Dahl East Ukrainian National University, Kyiv. 2025. Vol. 287, No 1. P. 46-56. <https://doi.org/10.33216/1998-7927-2025-287-1-46-56>.

Morkun V.S., Morkun N.V., Hryshchenko Y.O., Bobrov E.Y. Modeling the dynamics of the overflow product in fine wet screening of iron ore

Screening or sifting is widely used in the mining industry to separate ore particles by size. Huge volumes of ore at mining enterprises are regularly subjected to industrial screening, so studying the kinetics of the process and optimizing the corresponding technology is of great economic importance. Solving this problem is complicated by the presence of many working variables and various disturbing factors that determine the results of this technological operation. Firstly, these include the complex distribution of ore particles by size and density, as well as the complex influence on the movement of the oversize product of various dynamic operating modes of the screening surface. Recently, fine wet screening screens have been increasingly used for the classification of crushed ore at enrichment enterprises. The use of wet material for screening, the solid phase of which includes ore particles of different densities and sizes, imposes additional requirements on the design and adjustment of the corresponding working equipment. During continuous screening, when the feed rate of ore material to the screen is high enough, and it creates a

concentrated layer of particles of a certain thickness, for example, around the feed section, only the particles in the layer that are in direct contact with the screen have a chance to pass through the openings. As long as the upper layers are able to add small particles to this contact layer, the material flow rate will remain constant. As the material moves along the screen and more and more smaller particles pass through the holes, it becomes more dispersed. At the same time, the particles become more mobile and “separated,” transitioning from a “clumped” state to “separated” motion. These features significantly complicate the task of forming effective automated control of this process. The model of the dynamics of crushed ore material on the screening surface of a vibrating screen was studied, taking into account the advection, diffusion, segregation, and percolation of its particles in the material layer. The approach used allows taking into account the transformation of the particle size distribution of the solid phase of the oversize product and its density during movement on the screen surface. This improves the quality of automated control of the process.

Keywords: *control, automation, screening, model, characteristics, dynamics, vibration.*

Моркун Володимир Станіславович – д-р техн. наук, проф., професор Криворізького національного університету (Кривий Пір), morkunv@gmail.com.

Моркун Наталя Володимирівна – д-р техн. наук, проф., професор Львівського національного університету імені Івана Франка (Львів), nmorkun@gmail.com.

Грищенко Ярослав Олександрович – аспірант Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля (Київ), grischenckokgtl@gmail.com.

Бобров Євген Юрійович – аспірант, Криворізького національного університету (Кривий Пір), smgrischenko@gmail.com.

Стаття подана 15.07.2025.