ISSN 1998-7927(print) ISSN 2664-6498 (online)

DOI: https://doi.org/10.33216/1998-7927-2026-301-3-50-64

УДК 622.24:519.876

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ ПОЗДОВЖНЬОГО РЕЗОНАНСУ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ ДЛЯ БУРІННЯ СКЕРОВНИХ ДІЛЯНОК СВЕРДЛОВИН

Гриджук Я.С., Чудик І.І., Слабий О.О., Кондур Т.І., Мохній І.Ю.

MATHEMATICAL MODEL FOR ESTIMATING THE LONGITUDINAL RESONANCE OF THE DRILL STRING FOR DRILLING DIRECTIONAL SECTIONS OF WELLS

Gridzhuk Ya.S., Chudyk I.I., Slabyi O.O., Kondur T.I., Mokhniy I.Yu.

Стаття присвячена актуальній проблемі забезпечення динамічної стійкості бурильних колон під час спорудження нафтових і газових свердловин зі складною просторовою траєкторією стовбура. У роботі обґрунтовано, що сучасні технології поглиблення похило-скерованих та горизонтальних ділянок супроводжуються значними силами тертя та адгезії, які спричиняють виникнення шкідливих явищ переривчастого ковзання (stick-slip) та поздовжнього тертя, що перешкоджають ефективній передачі осьового навантаження на долото. Основним методом подолання цих опорів є впровадження у склад компоновок низу бурильної колони (КНБК) гідравлічних генераторів осьових коливань (ГОК). Проте встановлено, що додаткові вібрації, які генеруються осциляторами, за певних частотних режимів можуть спровокувати виникнення поздовжнього резонансу, що призводить до критичного зростання амплітуд напружень, втомного руйнування металу та аварійних обривів інструменту. Наукова новизна дослідження полягає у розробці та теоретичному обґрунтуванні уточненої математичної моделі поздовжніх коливань саме двоступеневої бурильної колони, що враховує специфіку викривлених ділянок свердловини. Авторами застосовано апарат класичного хвильового рівняння пружного стрижня з інтеграцією параметрів в'язкого демпфування та нелінійних сил тертя Кулона. Модель описує динамічну взаємодію двох ступеней колони (верхньої частини та КНБК), що мають різні геометричні розміри та фізико-механічні властивості. Особливу увагу приділено граничним умовам на стику ступенів, де виникає концентрація напружень через відбиття та посилення хвиль. Враховано вплив зенітного кута, інтенсивності викривлення стовбура, густоти бурового розчину та характеристик ГОК. У ході дослідження проведено моделювання для чотирьох типів компоновок, включаючи варіанти з використанням сталевих труб та титанових колюбінгових секцій. Результати аналізу амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) показали, що для коротших та жорсткіших сталевих колон резонансні піки є найбільш вираженими, тоді як у довгих колонах (понад 4000 м) спостерігається «розмиття» резонансу через високу дисипацію енергії. Встановлено, що використання легких сплавів, таких як титан, суттєво зміщує спектр власних частот вниз, що створює ризик виникнення резонансу на вищих гармоніках при високих частотах роботи осцилятора (до 20 Гц). Практичне значення роботи полягає у виведенні системи нерівностей для визначення меж зон поздовжнього резонансу. Отриманий аналітичний апарат дозволяє буровим підприємствам ще на етапі проектування розраховувати критичні частоти та обирати такі режими обертів долота і витрати промивальної рідини, які б гарантували роботу обладнання поза межами небезпечних вібрацій. Це дасть можливість підвищити експлуатаційну надійність бурильного інструменту та знизити вартість будівництва глибоких скерованих свердловин.

Ключові слова: *бурильна колона, гідравлічний осцилятор, математична модель, резонанс, скерована свердловина.*

Вступ. Спорудження нафтових і газових свердловин зі складною траєкторією стовбура є одним із пріоритетних напрямків розвитку сучасної видобувної галузі. Проте процес буріння таких об'єктів супроводжується

значними силами тертя та адгезії, що перешкоджають ефективній передачі осьового навантаження на долото. Явища переривчастого ковзання (*stick-slip*) призводять до нерівномірного заглиблення вибою та передчасного зносу дороговартісного бурового обладнання. Для подолання цих труднощів у складі компоновок низу бурильної колони дедалі частіше застосовуються гідравлічні генератори осьових коливань (ГОК). Впровадження таких пристроїв дозволяє суттєво знизити опір руху колони, проте водночас створює додаткові динамічні збурення в системі. Однією з найнебезпечніших загроз під час використання осциляторів є виникнення поздовжнього резонансу в елементах бурильного інструменту. Резонансні стани спричиняють критичне зростання амплітуд напружень, що веде до втомного руйнування та аварійних ситуацій. Особливої уваги потребує аналіз динаміки саме багатоступеневих колон, де на стиках секцій різної жорсткості виникає концентрація напружень. Сучасні наукові дослідження зосереджені на розробці нелінійних моделей поперечно-крутильного зв'язку та використанні методу скінченних елементів. Останнім часом активно впроваджуються методи інтеграції нейронних мереж для прогнозування складних вібраційних процесів у реальному часі. Науковцями також вивчено вплив геометричної нелінійності, надлишкового тиску газу та характеристик промивальної рідини на стабільність системи. Порівняльний аналіз труб із різних матеріалів, зокрема сталі та титану, підтверджує суттєву відмінність їхнього динамічного відгуку на збурення. Попри наявність ґрунтовних праць, питання точного визначення меж резонансних зон для викривлених ділянок свердловин залишається актуальним.

Аналіз закордонних і вітчизняних досліджень та публікацій. Метою багатьох досліджень руху бурильної колони в похило-скерованих свердловинах є визначення характеристик нелінійної динамічної моделі поперечно-крутильного зв'язку. Так, за допомогою рівнянь Лагранжа автори [1] створили модель, яка враховує контакт колони зі стінкою свердловини, дисипацію крутного моменту та складну траєкторію стовбура. Результати моделювання свідчать, що втрати на тертя зростають зі збільшенням кута нахилу свердловини, водночас амплітуда поперечних переміщень компоновки низу бурильної колони (КНБК) зменшується. Доведено, що при кутах нахилу понад 25° значно посилюються явища переривчастого ковзання (stick-slip) та частішають зіткнення інструменту з нижньою стінкою свердловини. На основі проведеного аналізу запропоновано оптимальні режими буріння, включаючи обмеження швидкості обертання та осьового навантаження, для запобігання пошкодженню обладнання.

Набуває популярності моделювання динаміки бурильних колон як ключових елементів систем автоматизації процесу буріння нафтових і газових свердловин. Авторами [2] визначено амплітудно-фазові частотні функції бурильної колони для поступального руху при використанні гідравлічних вибійних двигунів, враховуючи зміну глибини свердловини. У роботі запропоновано застосування енергоінформаційного підходу, що базується на синергетичній теорії інформації, для аналізу динамічних режимів поглиблення свердловин. Досліджено вплив ступеня узгодженості параметрів колони та ланки «долото–порода» на стабільність системи, а також виділено п'ять характерних режимів роботи – від рівноважного до хаотичного. Отримані висновки дозволяють оптимізувати математичне забезпечення автоматизованих систем управління через адаптацію до реальних умов буріння.

Результати дослідження поздовжніх вібрацій бурильної колони для глибоких свердловин за допомогою методу тривимірних динамічних скінченних елементів отримані у статті [3]. Автори розробили механічну модель, яка охоплює всю бурильну колону від гирла до вибою, враховуючи вплив наземних конструкцій та кривизну стовбура свердловини. У роботі запропоновано формулу розрахунку граничного втомного напруження, що дозволяє кількісно оцінювати та прогнозувати міцність бурильного інструменту. На основі аналізу свердловини S-7 виявлено критичні режими резонансу та визначено ділянки найбільшого ризику виникнення втомних поломок. Практичні рекомендації включають зміну швидкості обертання та навантаження на долото як ефективні заходи для зниження вібрацій та запобігання руйнуванню обладнання.

Стаття [4] присвячена комплексному аналізу поздовжніх, крутильних та згинних вібрацій бурильної колони, що виникають під час заглиблення вибою. Авторами представлено математичні моделі у вигляді стрижня з розподіленими параметрами та відповідними граничними умовами для опису пружних коливань системи. У роботі обґрунтовано

можливість використання віброшвидкості як універсального показника для оцінки міцності та надійності труб бурильної колони. Досліджено вплив взаємодії долота з породою на виникнення динамічних навантажень та втомних руйнувань елементів компоновки низу бурильної колони. Отримані теоретичні рівняння дозволяють визначати максимальні напруження в точках колони без складних експериментальних досліджень, що сприяє оптимізації режимів буріння.

Є ряд наукових праць присвячених удосконаленню динамічного аналізу вібрацій бурильної колони за допомогою інтеграції нейронних мереж у традиційні математичні моделі. Зокрема, авторами [5] запропоновано гібридний підхід, який дозволяє більш точно прогнозувати складні нелінійні коливання, що виникають під час процесу буріння. Дослідження базується на поєднанні фізичних законів механіки з обчислювальною потужністю моделей глибокого навчання для обробки великих масивів даних. Результати демонструють значне підвищення точності ідентифікації резонансних станів та небезпечних вібраційних режимів порівняно з класичними методами. Практична цінність роботи полягає у можливості запобігання аваріям та подовженні терміну експлуатації бурового обладнання завдяки моніторингу в реальному часі.

Проведено низку досліджень резонансних режимів бурильної колони в нелінійній динаміці під впливом змінного осьового навантаження. Автори [6] змоделювали бурильну колону як обертовий пружний стрижень з шарнірними опорами, враховуючи скінченні деформації та початкову кривизну. За допомогою методу Гальоркіна та методу гармонійного балансу було визначено амплітудно-частотні характеристики вібрацій на основних та вищих частотах. Чисельний аналіз показав, що геометрична нелінійність та зміна довжини колони суттєво впливають на зміщення резонансних кривих та стабільність системи. Результати дослідження містять рекомендації щодо вибору оптимальних параметрів бурильних колон для уникнення небезпечних коливальних режимів у реальних умовах експлуатації.

Проблемними питаннями нелінійного впливу надлишкового тиску на резонансні режими поперечних коливань бурильної колони займалися науковці [7]. Ними розроблено математичну модель на основі нелінійної теорії пружності Новожилова, що враховує відцентрові сили, осьове стиснення та початкову кривизну інструменту. За допомогою методів Бубнова-Гальоркіна та гармонійного балансу було отримано амплітудно-частотні характеристики для основної частоти та вищих гармонік. Чисельний аналіз показав, що надзвуковий потік зміщує резонансні криві вгору, а збільшення довжини колони призводить до нестабільності в низькочастотній області. Результати дослідження мають практичне значення для підвищення ефективності буріння з використанням газу та запобігання аварійним ситуаціям через резонанс.

У статті [8] досліджуються фрикційні характеристики бурильної колони з використанням методу скінченних елементів. Автори розробили динамічну математичну модель та застосували вдосконалений метод Generalized-α для аналізу впливу навантаження на долото, швидкості обертання та кривизни стовбура на сили тертя. Результати показали, що збільшення ваги на долото та швидкості обертання призводить до розширення діапазону бічних рухів та зростання моменту тертя. Встановлено, що опір тертя є значно вищим у горизонтальних секціях порівняно з вертикальними, а сили тертя при підйомі інструменту менші, ніж при його спуску. Дослідження надає важливі теоретичні рекомендації щодо оптимізації параметрів буріння для зменшення зносу обладнання та запобігання прихопленням у складних свердловинах.

Проведено ряд досліджень модальних характеристик поздовжніх, поперечних та крутильних коливань бурильної колони для умов суміщеного буріння. Авторами [9] розроблено математичну модель на основі методу скінченних елементів, представивши бурильну колону як однорідний пружний стрижень для аналізу власних частот. Дослідження показало, що зі збільшенням довжини колони власні частоти всіх типів вібрацій зменшуються, а інтервали між ними скорочуються, що підвищує ризик виникнення резонансу. Встановлено, що поперечні вібрації мають найменший діапазон частот, через що їх найважче уникнути шляхом регулювання швидкості обертання. Отримані результати є науковим підґрунтям для оптимізації проектування бурильних колон та підвищення якості стовбура свердловини.

У роботі [10] представлено результати аналізу гармонійного відгуку та модальних

характеристик поздовжніх коливань бурильної колони для глибоких свердловин з використанням програмного комплексу ANSYS). Автори розробили скінченно-елементну модель, яка враховує складні умови роботи обладнання, включаючи жорсткість сталевих канатів та вплив бурового розчину. Дослідження показало, що власні частоти поздовжніх вібрацій закономірно знижуються зі збільшенням глибини свердловини, що створює передумови для виникнення резонансу при певних швидкостях обертання. Встановлено, що при глибині 5000 метрів критичні амплітуди зміщення спостерігаються у верхній та середній частинах колони, що може призводити до передчасного втомного руйнування бурильного інструменту. Отримані дані дозволяють оптимізувати параметри буріння та конструкцію компоновок нижньої частини колони для мінімізації аварійних ситуацій на великих глибинах.

Для ефективного буріння похило-скерованих свердловин розроблено методику визначення оптимального місця встановлення генератора осьових коливань (ГОК) у бурильній колоні. Авторами [11] розроблено імітаційні моделі мовою Modelica та програму на Python для автоматизації обчислень, що дозволяє оцінювати зниження сил тертя залежно від розташування пристрою. За результатами динамічного моделювання встановлено, що вибір позиції ГОК суттєво впливає на ефективність передачі осьового зусилля до долота та мінімізацію опору рухові колони.

Робота [12] присвячена розробці математичної моделі визначення сил контактної взаємодії та тертя бурильної колони об стінки свердловини в складних гірничо-геологічних умовах. Автори провели порівняльний аналіз деформованого стану труб із різних матеріалів (сталі, титану та алюмінію) і встановили, що сталеві труби створюють значно більше тертя, ніж легкосплавні. Чисельне моделювання показало, що використання алюмінієвих секцій підвищує гнучкість системи в 1,1–1,8 рази, що дозволяє збільшити швидкість обертання долота без ризику пошкодження інструменту. Результати дослідження дають практичні рекомендації щодо раціонального розміщення труб у компонуванні для зниження енерговитрат та підвищення ефективності буріння глибоких похило-скерованих свердловин.

На основі модифікованої моделі стрижня Кірхгофа з урахуванням осьової деформації розроблено уточнену математичну модель просторового напружено-деформованого стану бурильної колони на похилій ділянці свердловини. Автори [13] врахували комплекс силових факторів, включаючи контактну взаємодію зі стінкою свердловини, сили тертя та вплив потоку промивальної рідини, що дозволило створити адекватну імітаційну модель у середовищі Modelica. Результати моделювання підтвердили виникнення динамічних коливань кутової швидкості та крутного моменту в різних перерізах колони, що є критично важливим для ефективного планування та безпечного проведення бурових робіт.

У статті [14] запропоновано аналітичні підходи до оцінки інерційних параметрів викривлених секцій бурильної колони, що обертаються, з урахуванням параметрів їхньої просторової деформації. Для дослідження використано математичні моделі із зосередженими та розподіленими масами, що дозволило встановити точні та асимптотичні залежності для визначення інерційних характеристик інструменту. Результати роботи мають практичне значення для аналізу динамічного опору бурильних колон, оцінки енерговитрат на обертання та прогнозування критичних швидкостей у процесі спорудження свердловин. Розроблений аналітичний апарат сприяє вдосконаленню розрахунків напружено-деформованого стану елементів колони, що працюють у складних геометричних умовах викривлених стовбурів.

Дослідження [15] присвячене вивченню динаміки ударного бурового інструменту для розробки твердих порід з акцентом на аналізі осьових вібрацій бурильної колони. Автори розробили механічну модель, яка дозволяє оцінити вплив цих вібрацій на енергію удару та ефективність руйнування гірської породи в умовах глибокого залягання. Результати моделювання демонструють, що амплітуда та частота осьових коливань критично впливають на стабільність роботи ударного механізму та швидкість проходки свердловини. Робота закладає теоретичну основу для оптимізації параметрів буріння геотермальних свердловин, забезпечуючи підвищення надійності обладнання при видобутку відновлюваної енергії.

Мета роботи та обґрунтування необхідності її виконання. Метою роботи є розробка та обґрунтування математичної моделі для оцінки поздовжнього резонансу двоступеневої бурильної колони під час буріння

скерованих ділянок свердловин. Це дозволить прогнозувати критичні частоти та обирати безпечні режими роботи глибинного бурового обладнання для запобігання аварійним поломкам інструменту..

Виклад основного матеріалу. У відповідності із прийнятими і описаними у [16] положеннями, проведемо комплексний аналіз параметрів, які необхідні для побудови математичної моделі двоступеневої бурильної колони для буріння скерованих ділянок свердловин. Перший блок параметрів – це геометричні та фізико-механічні параметри колони. Оскільки бурильна колона двоступенева, ці дані потрібні окремо для кожного ступеня (верхньої частини та нижньої компоновки – КНБК): довжина ступеней, або ж їх протяжність вздовж осі свердловини; зовнішній та внутрішній діаметри поперечних перерізів ступеней для розрахунку площі перерізу та моменту інерції; механічні властивості матеріалів ступеней колони: Модуль Юнга, модуль зсуву, густина; коефіцієнти жорсткості та демпфування. Другий блок вхідних даних - це параметри свердловини та середовища. Ці дані визначають зовнішні сили, що діють на колону: профіль свердловини: зенітний кут та азимут, що критично важливо для скерованого буріння, оскільки вони визначають силу притискання колони до стінки; густина (вязкість) бурового розчину; коефіцієнт тертя бурильної колони об стінку свердловини (статичний та динамічний); гідравлічний опір, втрати тиску в колоні та затрубному просторі. Третій блок вхідних даних - це параметри гідравлічного осцилятора – джерела додаткового динамічного збурення: частота коливань зазвичай залежить від витрати бурового розчину; амплітуда збурюючої сили; значення поздовжньої сили, яку генерує клапанний механізм; закон зміни сили, зазвичай це гармонічна функція; місце встановлення - відстань від долота, де інтегрований осцилятор. Четвертий блок вхідних даних - це граничні умови та взаємодія з вибоєм. Сюди слід віднести такі параметри: осьове навантаження на долото P, яке враховується як статична стискаюча сила; реактивний момент на вибої (момент опору) M_O, що виникає при руйнуванні гірської породи; коефіцієнт жорсткості вибою при контакті з долотом.

Математична модель руху ступеней бурильної колони описується класичним хвильовим рівнянням пружного стержня з урахуванням демпфування:

$$E_i F_i \frac{\partial^2 u_i(s,t)}{\partial t^2} - \mu_i \frac{\partial u_i(s,t)}{\partial t} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i(s,t)}{\partial s_i^2}, \quad (1)$$

де $u_i(s,t)$ – зміщення поперечного і-го перерізу стрижня з координатою s момент часу t; $E_i F_i$ – модуль Юнга і площа поперечного і-го перерізу перерізу стержня відповідно; μ – коефіцієнт дисипації, який характеризує в'язкий опір середовища, який пропорційний швидкості відносного зміщення; ρ_i – густина матеріалу і-го перерізу перерізу стержня.

Рівняння (1) є математичною моделлю того, як поздовжня хвиля (стиснення та розтягування) поширюється вздовж стрижня і поступово затихає через зовнішнє тертя. Рівність нулю у правій частині говорить про те, що розглядаються вільні коливання (без дії зовнішніх сил, що обурюють)

Математична модель проведення скерованого буріння передбачає визначення сил притискання і сил тертя. У викривлених ділянках виникає нормальна сила притискання, яка створює силу тертя Кулона. Коефіцієнт демпфування при цьому стає нелінійним:

$$F_{mp} = f_{mp} N(x) \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \quad (2)$$

де f_{mp} – коефіцієнт тертя; $N(x)$ – сила притискання бурильної колони до стінок свердловини, яка залежить від зенітного кута та інтенсивності викривлення;

$$N(x) = \sqrt{\left(q \sin\alpha + T\xi\right)^2 + \left(T\xi \sin\alpha\right)^2} \quad (3)$$

Де q *– вага* одиниці довжини труби*;* T – осьове зусилля; α – зенітний кут; ξ – інтенсивність викривлення.

У випадку, коли сили опору є досить великими виникає необхідність у застосуванні гідравлічного осцилятора коливань (ГОК), математична модель якого може бути представлена часовою закономірністю зміни збурюючої сили:

$$F_{осц}(t) = \Delta p_{\max} F_n \cdot \sin\left(2\pi\nu \cdot t\right) \quad (4)$$

де $\Delta p_{\max}$ – максимальне значення перепаду тиску; F_n – площа поршня осцилятора; ν – частота роботи осцилятора, яка зазвичай прямо пропорційна витраті бурового розчину; $\nu = kQ$; k – *конструктивний параметр осцилятора;* Q – подача бурового розчину.

Для побудови розрахункової схеми математичної моделі поздовжніх коливань двоступеневої бурильної колони задаємося рядом геометричних, кінематичних, динамічних та конструктивних параметрів як бурильної колони, так і середовища свердловини, які безпосередньо впливають на її роботу у скерованій свердловині. До геометричних параметрів віднесемо: F_1, F_2 - відповідно площі поперечних перерізів першої і другої ступеней відповідно; l_1, l_2 – довжина першої і другої ступеней відповідно; $L \approx l_1 + l_2$ – загальна довжина бурильної колони (свердловини); α – зенітний кут. Введемо ключові кінематичні параметри: $u_1(s_1,t)$, $u_2(s_2,t)$ – осьові зміщення поперечних перерізів першої і другої ступеней колони відповідно; S_1, S_2 – осьові координати поперечних перерізів першої і другої ступеней колони відповідно. До динамічних параметрів віднесемо: μ_1, μ_2 – коефіцієнти дисипації на першій і другій ступенях відповідно; χ_1, χ_2 - швидкості поширення поздовжніх збурень уздовж бурильної колони відповідно на першій і другій ступенях відповідно; g – прискорення вільного падіння; E_1, E_2 – модуль Юнга матеріалів першої і другої ступеней відповідно.

У відповідності до складеної розрахункової схеми (рис. 1) запишемо диференціальні рівняння поздовжніх переміщень поперечних перерізів бурильної колони:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \mu_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \chi_1{}^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial s_1^2} = g\cos\alpha, \quad s_1 \in [0, l_1], \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \mu_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \chi_2{}^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial s_2^2} = g\cos\alpha, \quad s_2 \in [0, l_2] \end{cases} \tag{5}$$

Надалі, зважаючи на умови розташування та контактування ступеней БК, граничні умови до системи (5) запишемо наступним чином:

$$\begin{cases} (s_1 = 0): \dfrac{\partial u_1}{\partial s_1} = \dfrac{c u_1}{E_1 F_1}; \\ (s_1 = l_1, s_2 = 0): u_1 = u_2, \dfrac{\partial u_1}{\partial s_1} E_1 F_1 = \dfrac{\partial u_2}{\partial s_2} E_2 F_2; \\ (s_2 = l_2): \dfrac{\partial u_2}{\partial s_2} = -\dfrac{P}{E_2 F_2}. \end{cases} \tag{6}$$

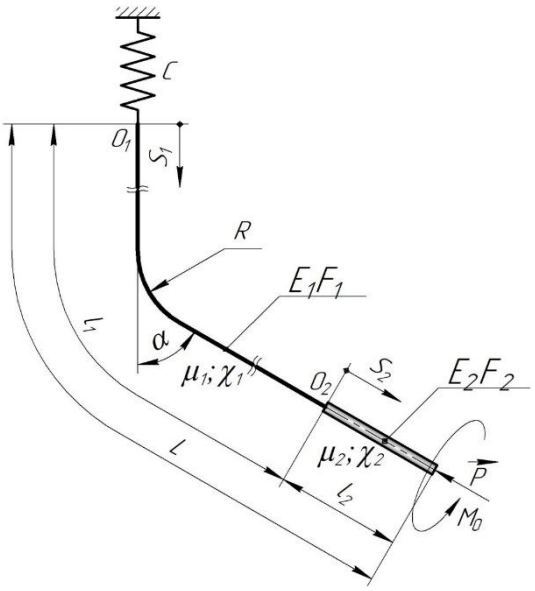

Рис. 1. Розрахункова схема для дослідження поздовжніх коливань двоступеневої бурильної колони при бурінні скерованої свердловини

Змоделюємо положення бурильного інструменту, коли вона перебуває в стані спокою, а на долото зі сторони вибою діє осьове навантаження $P = P_0 = const$. У цьому випадку коли пара кінематичних параметрів $u_1(s_1;t)$ та $u_2(s_2;t)$ не залежить від часу, а є функціями лише величин s_1 і s_2. Позначивши $u_1 = u_{01}(s_1)$, $u_2 = u_{02}(s_2)$ і враховуючи рівність нулю всіх часткових похідних по часу t, перепишемо рівняння (1) у наступному вигляді:

$$\begin{cases} u_{01''}(s_1) = -\dfrac{g\cos\alpha}{\chi_1^2}, \quad s_1 \in [0, l_1]; \\ u_{02''}(s_2) = -\dfrac{g\cos\alpha}{\chi_2^2}, \quad s_2 \in [0, l_2]. \end{cases} \tag{7}$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} (s_1 = 0): E_1F_1u_{01'} = cu_{01}; \\ (s_1 = l_1,\ s_2 = 0): u_{01} = u_{02},\ E_1F_1u_{01'} = E_2F_2u_{02'}; \\ (s_2 = l_2): E_2F_2u_{02'} = -P_0. \end{cases} \quad (8)$$

Розв'язок системи (6) з урахуванням граничних умов (7) буде наступним:

$$\begin{cases} u_{01}(s_1) = \left[\frac{g\cos\alpha l_1}{\chi_1^2} + \theta\left(\frac{g\cos\alpha l_2}{\chi_2^2} - \frac{P_0}{E_2F_2}\right)\right]\times \\ \times\left(\frac{1}{h} + s_1\right) - \frac{g\cos\alpha s_1^2}{2\chi_1^2}, \quad s_1 \in [0, l_1], \\ u_{02}(s_2) = \left(\frac{1}{h} + \frac{l_1}{2}\right)\frac{g\cos\alpha l_1}{\chi_1^2} + \left(\frac{g\cos\alpha l_2}{\chi_2^2} - \frac{P_0}{E_2F_2}\right)\times \\ \times\left[\theta\left(\frac{l_1}{h} + l_1\right) + s_2\right] - \frac{g\cos\alpha s_2^2}{2\chi_2^2},\ s_2[0, l_2]. \end{cases} \quad (9)$$

де, $h = \dfrac{c}{E_1F_1}$, $\theta = \dfrac{E_2F_2}{E_1F_1}$.

Надалі подамо шукані функції у наступному вигляді:

$$\begin{cases} u_1(s_1, t) = u_{01}(s_1) + U_1(s_1, t); \\ u_2(s_2, t) = u_{02}(s_2) + U_2(s_2, t) \end{cases} \quad (10)$$

де $U_1(s_1, t)$, $U_2(s_2, t)$ – функції, що характеризують ступінь зміщення перерізів ступеней бурильної колони від їх положень у стані спокою.

Після врахування останніх виразів у (5) і (6), отримаємо наступну систему рівнянь та граничні умови:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \mu_1\dfrac{\partial U_1}{\partial t} = \chi_1^2\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial s_1^2}, \quad s_1 \in [0, l_1], \\ \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \mu_2\dfrac{\partial U_2}{\partial t} = \chi_2^2\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial s_2^2}, \quad s_2 \in [0, l_2]. \end{cases} \quad (11)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} (s_1 = 0): \dfrac{\partial U_1}{\partial s_1} = hU_1,\ h = \dfrac{c}{E_1F_1}; \\ (s_1 = l_1, s_2 = 0): U_1 = U_2, \dfrac{\partial U_1}{\partial s_1} = \theta\dfrac{\partial U_2}{\partial s_2}, \\ \theta = \dfrac{E_1F}{E_2F_2}; \\ (s_2 = l_2): \dfrac{\partial U_2}{\partial s_2} = -P_\nu. \end{cases} \quad (12)$$

де $P_\nu = P - P_0$ – відхилення осьового навантаження відносно $P_0 = const$, причому

$$P_\nu(t + T_0) = P_\nu(t), \quad (13)$$

T_0 – час пульсації осьового навантаження на вибої, який практично рівний періоду як поздовжніх, так і крутильних автоколивань, що виникають через неоднорідність вибою свердловини.

Відомо, що вплив зовнішньої гармонійної сили на пружну систему формує в останньої гармонійні коливання із частотою збурюючої сили. Амплітуда й частота таких коливань повністю визначаються механічними властивостями коливної системи й амплітудою і частотою збурюючої сили. Саме цей вид коливань представляє інтерес в плані дослідження резонансу механічної системи та його параметрів (рис. 1). З теорії коливань механічних систем відомо, що значення резонансних частот дуже близькі до власних частот вільних коливань. Також відомо, що навіть порівняно значні дисипативні сили незначно впливають на власні частоти коливань цих систем [1, 2 та ін.]. Тому з метою спрощення досліджень, що, однак, практично не позначиться на кінцевих результатах, приймаємо коефіцієнти дисипації коливань на першій і другій ступенях нульовими: $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Надалі звернемося до принципу вільного підвішування бурильної колони, як двохрозмірного стержня [1, 3] і застосуємо його для рішення поставленого завдання. Вважаючи закріплення вгорі стрижня пружним (рис. 1), прийнявши осьове навантаження рівним нулю, систему (11) перепишемо у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \chi_1^2\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial s_1^2}, \quad s_1 \in [0, l_1]; \\ \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = \chi_2^2\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial s_2^2}, \quad s_2 \in [0, l_2]. \end{cases} \quad (14)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} (s_1 = 0): \dfrac{\partial U_1}{\partial s_1} = hU_1,\ h = \dfrac{c}{E_1F_1}; \\ (s_1 = l_1,\ s_2 = 0): U_1 = U_2,\ \dfrac{\partial U_1}{\partial s_1} = \theta \dfrac{\partial U_2}{\partial s_2}; \\ (s_2 = l_2): \dfrac{\partial U_2}{\partial s_2} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Для визначення власних частот поздовжніх коливань у системі (14) зробимо заміну змінних і перейдемо до безрозмірних параметрів:

$$\tau_1 = \frac{\chi_1}{l_1}t,\ \tau_2 = \frac{\chi_2}{l_2}t,\ \xi_1 = \frac{s_1}{l_1},\ \xi_2 = \frac{s_2}{l_2}. \quad (16)$$

У обраних змінних завдання (14) приймає наступний вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial \tau_1^2} = \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial \xi_1^2}, \\ \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial \tau_2^2} = \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial \xi_2^2} \end{cases} \quad (17)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} (\xi_1 = 0): \dfrac{\partial U_1}{\partial \xi_1} = h_0 U_1,\ h_0 = hl_1 = \dfrac{cl_1}{E_1F_1}; \\ (\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0): U_1 = U_2,\ \dfrac{\partial U_1}{\partial \xi_1} = \theta^* \dfrac{\partial U_2}{\partial \xi_2}, \\ \theta^* = \theta \dfrac{l_1}{l_2}; \\ (\xi_2 = 1): \dfrac{\partial U_2}{\partial \xi_2} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Розв'язок системи (17) шукаємо у вигляді:

$$\begin{cases} U_1(\xi_1, \tau_1) = A_1(\xi_1)e^{j\omega_1\tau_1}; \\ U_2(\xi_2, \tau_2) = A_2(\xi_2)e^{j\omega_2\tau_2}, \end{cases} \quad (19)$$

де $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, ω_1, ω_2 – безрозмірні постійні параметри. Після підстановки (19) в (17) одержуємо звичайні диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} A_{1''}(\xi_1) + \omega_1^2 A_1(\xi_1) = 0, \\ A_{1''}(\xi_1) + \omega_1^2 A_1(\xi_1) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} \xi_1 = 0: A_{1'}(0) = h_0 A_1(0); \\ \xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0: A_1(1)e^{j\omega_1\tau_1} = A_2(0)e^{j\omega_2\tau_2}, \\ A_{1'}(1)e^{j\omega_1\tau_1} = \theta^* A_{2'}(0)e^{j\omega_2\tau_2}; \\ \xi_2 = 1: A_{2'}(1) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Оскільки граничний переріз між ступенями колони коливається з однаковими параметрами, тому повинна виконуватися наступна умова:

$$\omega_1\tau_1 = \omega_2\tau_2. \quad (22)$$

Підставивши сюди значення τ_1, і τ_2, скоротивши на час *t*, одержимо:

$$\omega_1 \frac{\chi_1}{l_1} = \omega_2 \frac{\chi_2}{l_2} = \Omega. \quad (23)$$

де Ω - кругова частота.

З врахуванням (22) гранична умова на стику між ступенями бурильної колони (друга гранична умова) запишеться у формі:

$$\begin{cases} A_1(1) = A_2(0), \\ A_{1'}(1) = \theta^* A_{2'}(0). \end{cases} \quad (24)$$

Рішення рівнянь (20) мають вигляд:

$$\begin{cases} A_1(\xi_1) = C_{1,1}\sin\omega_1\xi_1 + C_{2,1}\cos\omega_1\xi_1; \\ A_2(\xi_2) = C_{1,2}\sin\omega_2\xi_2 + C_{2,2}\cos\omega_2\xi_2, \end{cases} \quad (25)$$

де $C_{1,1}, C_{2,1}, C_{1,2}, C_{2,2}$ - постійні інтегрування.

Продиференціюємо $(A_1(\xi_1), A_2(\xi_2))$ по часу, отримаємо:

$$\begin{cases} A_{1'}(\xi_1) = \omega_1(C_{1,1}\cos\omega_1\xi_1 - C_{2,1}\sin\omega_1\xi_1), \\ A_{2'}(\xi_2) = \omega_2(C_{1,2}\cos\omega_2\xi_2 - C_{2,2}\sin\omega_2\xi_2). \end{cases} \quad (26)$$

Звернемося до системи (24) і запишемо граничну умову на стику двох по-різному різних ступеней:

$$\begin{cases} A_1(1) = C_{1,1}\sin\omega_1 + C_{2,1}\cos\omega_1, \\ A_2(0) = C_{2,2}, \\ A_{1'}(1) = \omega_1(C_{1,1}\cos\omega_1 - C_{2,1}\sin\omega_1), \\ A_{2'}(0) = \omega_2 C_{1,2}. \end{cases} \quad (27)$$

З урахуванням рівностей (27) співвідношення (24) запишемо наступним чином:

$$\begin{cases} C_{1,1}\sin\omega_1 + C_{2,1}\cos\omega_1 = C_{2,2}; \\ C_{1,1}\cos\omega_1 - C_{2,1}\sin\omega_1 = \eta C_{1,2}, \end{cases} \quad (28)$$

де $\eta = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}\theta^*$.

Беручи до уваги (23), коефіцієнт η можна виразити через коефіцієнт відбиття k_n [189,194] наступною залежністю:

$$\eta = \frac{1-k_n}{1+k_n}, \quad k_n = \frac{\chi_2 E_1 F_1 - \chi_1 E_2 F_2}{\chi_2 E_1 F_1 + \chi_1 E_2 F_2} \quad . (29)$$

Знайдемо з (28) $C_{1,1}, C_{2,1}$, і розглянемо їхнє відношення:

$$\frac{C_{1,1}}{C_{2,1}} = \frac{C_{2,2}\sin\omega_1 + \eta C_{1,2}\cos\omega_1}{C_{2,2}\cos\omega_1 - \eta C_{1,2}\sin\omega_1}. \quad (30)$$

Надалі вираз (30) перетворимо до наступного виду:

$$\frac{C_{1,1}}{C_{2,1}} = \frac{\operatorname{tg}\omega_1 + \eta\dfrac{C_{1,2}}{C_{2,2}}}{1 - \operatorname{tg}\omega_1\eta\dfrac{C_{1,2}}{C_{2,2}}}. \quad (31)$$

Після цього записане співвідношення (31) можна представити так:

$$\begin{cases} \dfrac{C_{1,1}}{C_{2,1}} = \operatorname{tg}(\omega_1 + \psi_1), \\ \psi_1 = \operatorname{arctg}\left(\eta\dfrac{C_{1,2}}{C_{2,2}}\right). \end{cases} \quad (32)$$

Далі з урахуванням співвідношень (25) і (26) із граничних умов 3 і 1 (21) одержуємо:

$$\frac{C_{1,2}}{C_{2,2}} = \operatorname{tg}\omega_2, \quad (33)$$

$$\frac{C_{1,1}}{C_{2,1}} = \frac{h_0}{\omega_1} \quad . \quad (34)$$

Тепер, спільно розв'язуючи рівняння (32) (33) і (34), отримаємо:

$$\operatorname{tg}(\omega_1 + \psi_1) = \frac{h_0}{\omega_1}, \quad (34)$$

Звідки

$$\omega_1 + \psi_1 = m\pi + \operatorname{arctg}\frac{h_0}{\omega_1}, \; m = 0,1,2,3,\ldots, \quad (35)$$

де

$$\psi_1 = \operatorname{arctg}(\eta\operatorname{tg}\psi_2). \quad (36)$$

Безрозмірні частоти ω_1, ω_2 виражаються через резонансну частоту Ω:

$$\omega_1 = \frac{l_1}{\chi_1}\Omega, \quad \omega_2 = \frac{l_2}{\chi_2}\Omega. \quad (37)$$

Виразивши ω_1, ω_2 через Ω за залежністю (23) і підставивши їх в (35), отримаємо рівняння для визначення частот поздовжнього резонансу.

Тепер перейдемо до оцінки зони поздовжнього резонансу.

Оскільки при $c \to 0$ параметр $h_0 \to 0$, а при $c \to \infty$ параметр $h_0 \to \infty$, те знаходимо, що зони поздовжнього резонансу визначаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &m\pi < \omega_1 + \psi_1 < (m+0.5)\pi, \\ &m = 0,1,2,3,\ldots, \end{aligned} \quad (38)$$

де

$$\psi_1 = \operatorname{arctg}(\eta\operatorname{tg}\psi_2). \quad (39)$$

Після підстановки значень ω_1, ω_2 в нерівності (38) і нескладних перетворень одержуємо:

$$\begin{cases} l_2 + \dfrac{\chi_1}{\Omega}\left[m\pi - arctg\left(\eta tg \dfrac{\Omega l_2}{\chi_2} \right) \right] < L, \\ l_2 + \dfrac{\chi_1}{\Omega}\left[(m+0{,}5)\pi - arctg\left(\eta tg \dfrac{\Omega l_2}{\chi_2} \right) \right] > L, \end{cases} \quad (40)$$

де $m = 0,1,2,3,...$ $L = l_1 + l_2$.

Таким чином, система нерівностей (40) визначає положення зони поздовжнього резонансу для бурильної колони, що складається з двох різнорідних ступеней. Оскільки така колона складається з двох ступеней різної жорсткості та маси, вона має складний спектр власних частот, що робить її особливо вразливою. У місці переходу від одного ступеня до іншого (стик труб різного діаметру) виникає концентрація напружень. При переході хвилі через межу двох ступенів частина енергії відбивається, а частина – посилюється, що може створити "стоячу хвилю" саме в районі перехідника, призводячи до його пошкодження та подальшого руйнування.

Як показує сучасна практика буріння [1-6], на вертикальних ділянках свердловин дисипація енергії коливань значно нижча, ніж на похило-скерованих, що робить вертикальні ділянки більш схильними до тривалих резонансних коливань. Разом з тим, небезпека резонансу може бути присутня і на похило-скерованих ділянках поблизу КНБК при застосуванні ГОК. Тому для аналізу поздовжнього резонансу обрано чотири компоновки бурильних колон з ГОК для буріння скерованих ділянок свердловин із режимними параметрами: зенітним кутом α, радіусом викривлення R, густиною бурового розчину ρ_p, частотою роботи осцилятора та частотою обертання долота n (табл.1).

Для ефективного процесу буріння КНБК чотирьох компоновок оснащено ГОК. Частота роботи ГОК визначалася технологічними особливостями роботи осцилятора, зенітним кутом та конструктивними особливостями компоновок. Конструктивною особливістю компоновки №4 є те, що до її складу входить ступінь колтюбінгових гнучких труб, виготовлених з титанового сплаву. Для дослідження резонансу компоновок визначимо власні частоти поздовжніх коливань. Для двоступеневої бурильної колони у випадку коли верхній кінець підвішений, а нижній вільний, кругова частота власних коливань згідно [3] визначається за наступним рівнянням:

$$tg\left(\frac{\omega l_1}{\chi_1} \right) \cdot tg\left(\frac{\omega l_2}{\chi_2} \right) = \frac{F_1}{F_2}. \quad (41)$$

Таблиця 1

Параметри компоновок бурильних колон та параметри буріння

Позначення параметру	Од. виміру	Значення для компоновок			
		№1	№2	№3	№4
l_1	м	2225	3250	4000	4750
l_2	м	200	250	225	250
F_1	см^2	153,9	153,9	126,7	62,1
F_2	см^2	208,8	208,8	173,8	173,8
E_1	Па	$2{,}1\cdot10^{11}$	$2{,}1\cdot10^{11}$	$2{,}1\cdot10^{11}$	$1{,}1\cdot10^{11}$
E_2	Па	$2{,}1\cdot10^{11}$	$2{,}1\cdot10^{11}$	$2{,}1\cdot10^{11}$	$2{,}1\cdot10^{11}$
ρ_1	кг/м^3	7850	7850	7850	4500
ρ_2	кг/м^3	7850	7850	7850	7850
α	град	60	70	80	90
R	м	500	550	600	500
ρ_p	кг/м^3	1250	1300	1250	1200
μ_1		0,02	0,02	0,03	0,03
μ_2		0,08-0,15	0,15-0,2	0,18-0,25	0,25-0,4
ν	Гц	14	16	18	20
n	об/хв	90	60	60	60

Кількість частот власних коливань може бути нескінченною, тому кожному значенню ω для довільного моменту часу t в довільному перерізі колони з координатою s відповідатимуть і певні часткові розв'язки рівнянь (41), які будуть сумою всіх часткових розв'язків для кожного значення ω. За результатами розв'язку рівняння (41) у таблиці 2 наведено значення власних частот коливань перших трьох форм.

Таблиця 2

Власні частоти поздовжніх коливань

Позначення параметру	Од. виміру	Значення для компоновок			
		№1	№2	№3	№4
ω_I	Гц	0,58	0,40	0,32	0,28
ω_{II}	Гц	1,74	1,20	0,97	0,84
ω_{III}	Гц	2,91	2,00	1,62	1,41

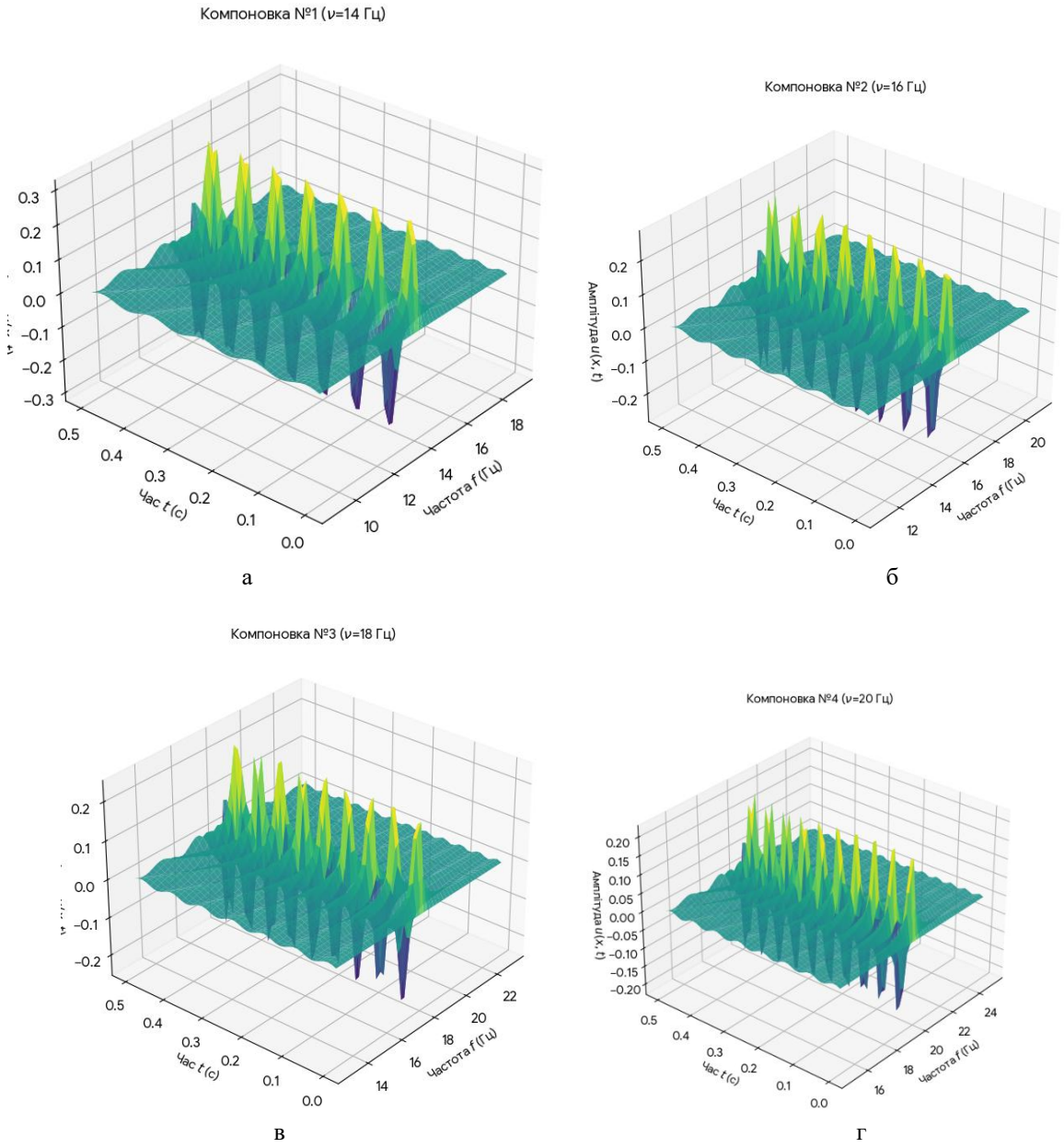

Рис. 3. АЧХ оцінки резонансу поздовжніх коливань компоновок двоступеневих бурильних колон при бурінні скерованих свердловин; а – 1; б – №2; в – №3; г – №4

Для дослідження резонансу зручно проводити шляхом побудови амплітудно-частотної характеристики (АЧХ). АЧХ бурильної колони дозволяє виявити “небезпечні” частоти, при яких відбувається різке зростання амплітуди вимушених коливань, що може призвести до обриву інструменту. Знаючи АЧХ, буровики можуть обирати такі оберти долота, щоб вийти із зони сильних вібрацій і вберегти бурове обладнання. За числовими значеннями параметрів компоновок, режимних параметрів буріння, а також визначених частот власних коливань побудовано 3D-моделі АЧХ (рис. 3). Графіки демонструють залежність амплітуди зміщення від частоти осцилятора та часу**,** враховуючи зміну фізико-механічних властивостей матеріалів, геометричних параметрів ступенів, режимних параметрів буріння.

На графіках (рис. 3) видно "гребені" резонансу на частотах, близьких до робочої частоти ГОК. По осі часу спостерігається гармонічний характер коливань, що відповідає характеру роботи ГОК. АЧХ №1 і №2 Мають найбільш чітко виражені та гострі резонансні піки. Це зумовлено тим, що ці компоновки мають однорідну сталеву структуру. При відносно малих довжинах 2225 і 3250м компоновки мають більшу жорсткість. Через низьку дисипацію енергії на цих ділянках

виникає критичне зростання амплітуд напружень, що створює високий ризик втомного руйнування металу та аварійних обривів інструменту. При власній частоті 0,58 Гц і частоті роботи осцилятора 14Гц АЧХ№1, а також при власній частоті 0,40 Гц і частоті осцилятора 16 Гц АЧХ№2 спостерігаються піки з амплітудою зміщення відповідно близько 0,3 і 0,2 ум. од. Для АЧХ №3 спостерігається явище «розмиття» резонансного піку. Велика довжина (4000 м) та значний зенітний кут (80град) призводять до високої дисипації (розсіювання) енергії коливань. Хоча піки менш виражені, резонанс все одно можливий, проте він має менш «ударний» характер порівняно з коротшими колонами. При власній частоті 0,32Гц та частоті осцилятора 18Гц максимальна амплітуда значно нижча, піки не перевищують 0,15 ум. од. На АЧХ №4 Спектр власних частот суттєво зміщений вниз (найнижчі значення власних частот 0,28 Гц), Використання легкого титанового сплаву для колюбінгової секції та велика загальна довжина (4750 м). При високій частоті роботи осцилятора (20 Гц) основні резонансні піки мають амплітуду до **0,2**, проте спектр дуже насичений, що вказує на специфічну загрозу резонансу на вищих гармоніках (5-й або 6-й моді), що потребує особливої обережності при виборі режимів промивки. Тобто найбільш небезпечними з точки зору амплітуди є резонанси в жорстких сталевих колонах (№1, №2) з нижчими модами, тоді як у надглибоких та легкосплавних системах (№4) головною загрозою є збіг робочих частот із вищими модами власних коливань.

Висновки. Розроблено математичну модель для оцінки поздовжнього резонансу бурильної колони при бурінні скеровних ділянок свердловин. Проведений аналіз амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) та розрахунок власних частот дозволяють виділити наступне. Найбільшу небезпеку з точки зору руйнування становлять короткі сталеві колони (№1, №2). Через високу жорсткість і низьке розсіювання енергії вони мають найвищі резонансні піки (амплітуда до 0,3). Це створює критичні втомні напруження, що можуть призвести до обриву інструменту вже на перших модах коливань. У глибоких свердловинах (№3) спостерігається ефект демпфування. Зі збільшенням довжини колони (понад 4000 м) та зенітного кута спостерігається позитивний ефект «розмиття» резонансу. Висока дисипація енергії знижує пікові амплітуди (до 0,15), роблячи роботу осцилятора більш м’якою, хоча ризик виникнення стоячих хвиль залишається. Для колтюбінгових колон (№4) позитивною є “специфіка легких сплавів”. Використання титанових секцій суттєво змінює динамічний портрет колони, зміщуючи спектр власних частот вниз (0,28 Гц). Головною загрозою тут є не основний резонанс, а збіг частоти осцилятора з вищими гармоніками (5-6 мода). Це вимагає особливо точного підбору витрати промивальної рідини. Запропонована математична модель та отримана система нерівностей дозволяють ще на етапі проектування визначити «безпечні вікна» для роботи насосів. Це дає змогу уникати зон критичних вібрацій, що підвищує ресурс бурильного інструменту та запобігає аваріям у складних похило-скерованих свердловинах.

Література

1. Tao Z., Meng Y., Feng Q., Yang K., Kang W., Huang X., Fang P. Analysis of nonlinear vibration of lateral-torsional coupling for drill string in deviated well // *Journal of Vibroengineering*. 2024. Vol. 26, No. 7. P. 1584–1601. DOI: https://doi.org/10.21595/jve.2024.24140
2. Kropyvnytska V., Humeniuk T., Sabat N., Sementsov G. Analysis of amplitude-phase functions of the drill string as a component of automation system // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. Vol. 1/2 (91). P. 48–58. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.120544
3. Liu W., Song M., Xu Z., Zhang X. Gap element method of longitudinal vibration of drill string // *Journal of Chemical and Pharmaceutical Research*. 2014. Vol. 6, No. 7. P. 1523–1530.
4. Гоголь В. І., Огородніков П. І., Світлицький В. М. Дослідження поздовжніх, крутильних і згинальних коливань бурильної колони // *Нафтогазова галузь України*. 2013. № 6. С. 5–8.
5. Chen J., Yang L., Huang Q., Zhang W., Qiao J., Zhang X., Jiang D. Dynamic analysis of drill string vibration enhanced by neural network based models // *Geoenergy Science and Engineering*. 2025. Vol. 246. Article 213618. DOI: https://doi.org/10.1016/j.geoen.2024.213618
6. Kudaibergenov A., Kudaibergenov A., Khajiyeva L. On resonance regimes of drill string nonlinear dynamics // *AIP Conference Proceedings*. 2017. Vol. 1872, No. 1. Article 020007. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4998850
7. Kudaibergenov A. K., Kudaibergenov A. K., Khajiyeva L. A. The effect of a supersonic gas flow on resonance regimes of drill string nonlinear vibrations // *WSEAS Transactions on Fluid*

Mechanics. 2025. Vol. 20. P. 10-19. DOI: https://doi.org/10.37394/232013.2025.20.2
8. Liu D., Huang X., Deng K., Fang P., Yan H., Li C., Cai K. Research on friction characteristics of drill string in whole well section of gas drilling based on finite element method // *Journal of Vibroengineering*. 2025. Vol. 27, No. 3. P. 567–581. DOI: https://doi.org/10.21595/jve.2025.24519
9. Yuan H., Dong G., Chen Y., Wang Q., Mi G. The vibration modal characteristics of drillstring in compound drilling // *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. Vol. 2208, No. 1. Article 012006. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2208/1/012006
10. Han C., Yan T., Zhang Y., Wang Q. Longitudinal harmonic response analysis of drill string in deep well by using ANSYS // *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*. 2013. Vol. 6, No. 20. P. 3815–3819.
11. Слабий О. О., Гриджук Я. С., Царук В. Ф., Кондур Т. І., Мохній І. Ю., Михайлів А. Б. Визначення оптимального місця розташування генератора осьових коливань в бурильній колоні // Нафтогазова енергетика. 2024. № 1 (41). С. 86–95. DOI: https://doi.org/10.31471/1993-9868-2024-1(41)-86-95
12. Bembenek M., Grydzhuk Y., Gajdzik B., Ropyak L., Pashechko M., Slabyi O., Al-Tanakchi A., Pryhorovska T. An analytical–numerical model for determining “drill string–wellbore” frictional interaction forces // *Energies*. 2024. Vol. 17, No. 2. P. 301. DOI: https://doi.org/10.3390/en17020301
13. Гриджук Я. С., Слабий О. О., Аль-Танакчі А., Кондур Т. І., Мохній І. Ю. Дослідження деформованого стану бурильної колони, що обертається на ділянці похилої свердловини // Нафтогазова енергетика. 2023. № 2 (40). С. 38–52. DOI: https://doi.org/10.31471/1993-9868-2023-2(40)-38-52
14. Grydzhuk Ya., Chudyk I., Velychkovych A., Andrusyak A. Analytical estimation of inertial properties of the curved rotating section in a drill string // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol. 1 (7 (97)). P. 6–14. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.154827
15. Yang Y., Huang F., Yan D., Liao H., Niu J. Dynamics study of hot dry rock percussive drilling tool based on the drill string axial vibration // *Geoenergy Science and Engineering*. 2024. Vol. 242. Article 213599. DOI: https://doi.org/10.1016/j.geoen.2024.213599
16. Slabyi O. O., Hrydzhuk Ya. S., Kondur T. I., Mokhniy I. Yu. Features of the drill string model construction with axial vibration oscillator // *Proceedings of the XIV International Scientific and Technical Conference ATME 2026*. Ivano-Frankivsk – Yaremche, 9–13 February 2026.
17. Бабенко А. Є., Боронко О. О., Лавренко Я. І., Трубачев С. І. Коливання стержнів, пластин та оболонок [Електронний ресурс]: підручник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 252 с.
18. Бабенко А. Є., Боронко О. О., Лавренко Я. І., Трубачев С. І. Коливання неконсервативних механічних систем: монографія. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 153 с.

References

1. Tao Z., Meng Y., Feng Q., Yang K., Kang W., Huang X., Fang P. Analysis of nonlinear vibration of lateral-torsional coupling for drill string in deviated well // Journal of Vibroengineering. 2024. Vol. 26, No. 7. P. 1584-1601. DOI: https://doi.org/10.21595/jve.2024.24140
2. Kropyvnytska V., Humeniuk T., Sabat N., Sementsov G. Analysis of amplitude-phase functions of the drill string as a component of automation system // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 1/2 (91). P. 48–58. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.120544
3. Liu W., Song M., Xu Z., Zhang X. Gap element method of longitudinal vibration of drill string // Journal of Chemical and Pharmaceutical Research. 2014. Vol. 6, No. 7. P. 1523–1530.
4. Hohol V. I., Ohorodnikov P. I., Svitlytskyi V. M. Doslidzhennia pozdovzhnikh, krutylnykh i zghynalnykh kolyvan burylnoi kolony // Naftohazova haluz Ukrainy. 2013. № 6. P. 5–8.
5. Chen J., Yang L., Huang Q., Zhang W., Qiao J., Zhang X., Jiang D. Dynamic analysis of drill string vibration enhanced by neural network based models // Geoenergy Science and Engineering. 2025. Vol. 246. Article 213618. DOI: https://doi.org/10.1016/j.geoen.2024.213618
6. Kudaibergenov A., Kudaibergenov A., Khajiyeva L. On resonance regimes of drill string nonlinear dynamics // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1872, No. 1. Article 020007. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4998850
7. Kudaibergenov A. K., Kudaibergenov A. K., Khajiyeva L. A. The effect of a supersonic gas flow on resonance regimes of drill string nonlinear vibrations // WSEAS Transactions on Fluid Mechanics. 2025. Vol. 20. P. 10-19. DOI: https://doi.org/10.37394/232013.2025.20.2
8. Liu D., Huang X., Deng K., Fang P., Yan H., Li C., Cai K. Research on friction characteristics of drill string in whole well section of gas drilling based on finite element method // Journal of Vibroengineering. 2025. Vol. 27, No. 3. P. 567–581. DOI: https://doi.org/10.21595/jve.2025.24519
9. Yuan H., Dong G., Chen Y., Wang Q., Mi G. The vibration modal characteristics of drillstring in compound drilling // Journal of Physics: Conference Series. 2022. Vol. 2208, No. 1. Article 012006. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2208/1/012006
10. Han C., Yan T., Zhang Y., Wang Q. Longitudinal harmonic response analysis of drill string in deep

well by using ANSYS // Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology. 2013. Vol. 6, No. 20. P. 3815–3819.
11. 11. Slabyi O. O., Hrydzhuk Ya. S., Tsaruk V. F., Kondur T. I., Mokhnii I. Yu., Mykhailiv A. B. Vyznachennia optymalnoho mistsia roztashuvannia heneratora osovykh kolyvan v burylnii koloni // Naftohazova enerhetyka. 2024. № 1 (41). P. 86–95. DOI: https://doi.org/10.31471/1993-9868-2024-1(41)-86-95
12. Bembenek M., Grydzhuk Y., Gajdzik B., Ropyak L., Pashechko M., Slabyi O., Al-Tanakchi A., Pryhorovska T. An analytical–numerical model for determining “drill string–wellbore” frictional interaction forces // Energies. 2024. Vol. 17, No. 2. P. 301. DOI: https://doi.org/10.3390/en17020301
13. Hrydzhuk Ya. S., Slabyi O. O., Al-Tanakchi A., Kondur T. I., Mokhnii I. Yu. Doslidzhennia deformovanoho stanu burylnoi kolony, shcho obertaietsia na diliantsi pokhyloi sverdlovyny // Naftohazova enerhetyka. 2023. № 2 (40). P. 38–52. DOI: https://doi.org/10.31471/1993-9868-2023-2(40)-38-52
14. Grydzhuk Ya., Chudyk I., Velychkovych A., Andrusyak A. Analytical estimation of inertial properties of the curved rotating section in a drill string // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2019. Vol. 1 (7 (97)). P. 6–14. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.154827
15. Yang Y., Huang F., Yan D., Liao H., Niu J. Dynamics study of hot dry rock percussive drilling tool based on the drill string axial vibration // Geoenergy Science and Engineering. 2024. Vol. 242. Article 213599. DOI: https://doi.org/10.1016/j.geoen.2024.213599
16. Slabyi O. O., Hrydzhuk Ya. S., Kondur T. I., Mokhniy I. Yu. Features of the drill string model construction with axial vibration oscillator // Proceedings of the XIV International Scientific and Technical Conference ATME 2026. Ivano-Frankivsk – Yaremche, 9–13 February 2026.
17. Babenko A. Ye., Boronko O. O., Lavrenko Ya. I., Trubachev S. I. Kolyvannia sterzhniv, plastyn ta obolonok [Elektronnyi resurs]: pidruchnyk. Kyiv: KPI im. Ihoria Sikorskoho, 2022. 252 p.
18. Babenko A. Ye., Boronko O. O., Lavrenko Ya. I., Trubachev S. I. Kolyvannia nekonservatyvnykh mekhanichnykh system: monohrafiia. Kyiv: KPI im. Ihoria Sikorskoho, 2020. 153 p.

Gridzhuk Ja.S., Chudyk I.I., Slabyi O.O., Kondur T.I., Mokhniy I.Yu. Mathematical model for estimating the longitudinal resonance of the drill string for drilling directional sections of wells

The article is devoted to the urgent problem of ensuring the dynamic stability of drill strings during the construction of oil and gas wells with a complex spatial trajectory of the shaft. The work substantiates that modern technologies for deepening inclined and horizontal sections are accompanied by significant friction and adhesion forces, which cause the occurrence of harmful phenomena of intermittent slip (stick-slip) and longitudinal friction, which prevent the effective transmission of axial load to the bit. The main method of overcoming these resistances is the introduction of hydraulic axial vibration generators (HGV) into the bottom of the drill string (BHS) assemblies. However, it has been established that additional vibrations generated by oscillators, at certain frequency regimes, can provoke the occurrence of longitudinal resonance, which leads to a critical increase in stress amplitudes, fatigue fracture of the metal and emergency tool breakage. The scientific novelty of the study lies in the development and theoretical substantiation of a refined mathematical model of longitudinal vibrations of a two-stage drill string, which takes into account the specifics of curved sections of the well. The authors used the apparatus of the classical wave equation of an elastic rod with the integration of viscous damping parameters and nonlinear Coulomb friction forces. The model describes the dynamic interaction of two stages of the column (the upper part and the BHA), which have different geometric dimensions and physical and mechanical properties. Particular attention is paid to the boundary conditions at the junction of the stages, where stress concentration occurs due to reflection and amplification of waves. The influence of the zenith angle, the intensity of the barrel curvature, the density of the drilling fluid and the characteristics of the GOK was taken into account. During the study, modeling was carried out for four types of layouts, including options using steel pipes and titanium colubing sections. The results of the analysis of the amplitude-frequency characteristics (AFC) showed that for shorter and stiffer steel columns, the resonance peaks are most pronounced, while in long columns (over 4000 m) there is a “blurring” of the resonance due to high energy dissipation. It was found that the use of light alloys, such as titanium, significantly shifts the spectrum of natural frequencies downward, which creates a risk of resonance at higher harmonics at high oscillator operating frequencies (up to 20 Hz). The practical significance of the work lies in deriving a system of inequalities to determine the boundaries of longitudinal resonance zones. The resulting analytical apparatus allows drilling companies to calculate critical frequencies at the design stage and choose such bit rotation modes and flushing fluid flow rates that would guarantee the operation of the equipment outside the limits of dangerous vibrations. This will make it possible to increase the operational reliability of the drilling tool and reduce the cost of building deep directional wells.

Keywords: *drill string, hydraulic oscillator, mathematical model, resonance, directional well.*

Гриджук Ярослав Степанович – д. т. н, професор кафедри технічної механіки, інженерної та комп'ютерної графіки Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
https://orcid.org/0000-0002-1429-8640
Чудик Ігор Іванович – д. т. н, професор кафедри буріння свердловин Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
https://orcid.org/0000-0002-7402-6962
Слабий Орест Олегович – к. т. н, доцент кафедри технічної механіки, інженерної та комп'ютерної графіки Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
https://orcid.org/0000-0002-1274-2875
Кондур Тарас Ігорович – аспірант, кафедри технічної механіки, інженерної та комп'ютерної графіки Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
https://orcid.org/0009-0009-4629-030X
Мохній Ігор Юрійович – аспірант, кафедри буріння свердловин Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
https://orcid.org/0000-0003-3852-3934

Дата першого надходження статті 21.02.2026.
Дата прийняття статті до друку після рецензування 25.03.2026.
Дата публікації 11.05.2026.

Стаття з відкритим доступом, відповідно до умов ліцензії
Creative Commons (CC BY 4.0)