DOI: https://doi.org/10.33216/1998-7927-2019-256-8-5-9

УДК 624.012.25: 539.386

ПАРАЛЛЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ СКІНЧЕНННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Гоменюк С.І., Козуб В.Ю.

PARALLEL IMPLEMENTATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR THE THERMOELASTICITY PROBLEM

Homeniuk S.I., Kozub V.Yu.

У статті досліджуються проєктні розрахунки конструкцій, що потребують всебічного аналізу процесів деформування під дією експлуатаційних навантажень. В реальних умовах експлуатації більшість елементів конструкцій знаходяться під дією механічних і теплових навантажень. Для аналізу процесів деформування необхідно вирішувати задачу термопружності. Для розв'язання таких задач зазвичай використовується метод скінченних елементів, точність якого залежить від кількості розрахункових вузлів. Одним з етапів розв'язування задач термопружності є формування матриць жорсткості та теплопровідності скінченних елементів. Для елементів одного типу використовуються обчислення за однаковою процедурою і кількість таких обчислень зумовлює час розв'язування задачі. У традиційному підході ці обчислення виконуються послідовно. У випадку великих розмірів сіток кількість та час розрахунків збільшуються, що потребує оптимізації обчислень з використанням алгоритмів паралельних обчислень. Паралелізація методу скінченних елементів потребує управління роботою достатньо великої кількості процесів, а також упорядкування обміну даними між процесами. Час виконання паралельних обрахунків визначається найповільнішою підзадачею. При формуванні матриць жорсткості та теплопровідності виникає необхідність проводити інтегрування по області скінченного елементу. Використання моментної схеми скінченних елементів переміщення і деформації апроксимуються однаковими поліномами, що спрощує обчислення інтегралів. Ця процедура закінчується формуванням блоку матриці жорсткості, причому для сусідніх скінченних елементів цей блок є частково спільним. У системі із загальною пам'яттю обмін інформацією між процесорами відбувається за допомогою змінних, що зберігаються в загальній пам'яті. Розроблено алгоритми паралельного програмування для побудови матриць жорсткості скінченних елементів та розрахунку напружено-деформованого стану для пакету програм «МІРЕЛА+». Отримано розв'язки для розрахункових сіток різних розмірів. Досліджено вплив паралелізації на час розрахунку.

***Ключові слова**: метод скінченних елементів, матриця жорсткості, паралельні обчислення, OpenMP, напружено-деформований стан.*

Вступ. При проєктуванні конструкцій, що працюють в умовах теплового і механічного навантаження, виникає необхідність прогнозування фізико-механічних характеристик і показників якості у тривимірному аспекті.

Одним з найбільш ефективних чисельних методів проєктних розрахунків є метод скінченних елементів. Характерною особливістю методу є безпосередній перехід від континуального об'єкту до дискретного шляхом апроксимації геометрії досліджуваного об'єкту і шуканих полів переміщень (напружень). У цьому випадку для складених або шаруватих конструкцій кожен елемент конструкції (або шар) з різними фізико-механічними характеристиками піддається дискретизації на просторові елементи. Отримана дискретна модель твердого тіла дозволяє ефективно проаналізувати поведінку твердого тіла в експлуатаційних умовах. На основі використання методу скінченних елементів отримано чисельні розв'язки задач термопружності для в'язкопружних тіл [1-3]. Тривимірну задачу термопружності неоднорідних в окружному напрямку тіл обертання на основі моментної схеми скінченних елементів [4, 5] розв'язано в роботах [5, 6].

Для підвищення точності рішення частіше за все використовують розрахункові сітки великого розміру, що негативно впливає на час розв'язування задачі. Особливо це стосується розв'язків нелінійних задач з використанням ітераційних процедур. Одним з підходів до оптимізації розрахунків є застосування паралельних обчислень, що дозволяє значною мірою підвищити продуктивність проєктних досліджень.

Для методу скінченних елементів можна виділити три етапі розв'язування задачі: формування вхідних даних з нанесенням розрахункової сітки; формування матриць системи рівнянь і розв'язування системи рівнянь; процедура виведення результатів. При чому формування матриці жорсткості та розв'язування системи алгебраїчних рівнянь складає основні затрати часу. Прискорення виконання цих етапів дозволить зменшити затрати машинного часу. Одним з підходів до прискорення обрахунків є використання паралельних алгоритмів [7].

Серед методів підвищення продуктивності паралелізації обчислень можна виділити методи, що базуються на використанні блочних алгоритмів прямих методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з розрідженими симетричними матрицями [8, 9]; методи, спрямовані на дослідження ефективності декомпозиції розрахункової області [10]. За методами декомпозиції задача розділяється на декілька підзадач меншої розмірності, розв'язання яких можна виконати паралельно. Більшість публікацій присвячено різним підходам до розв'язування систем рівнянь, що формуються в методі скінченних елементів [11-15]. Проте дуже мало робіт присвячено паралелізації обчислень при формуванні матриць систем рівнянь методу скінченних елементів. Час, що витрачається на формування матриці жорсткості складає суттєву частину всього часу рішення. При розв'язуванні зв'язаних задач термопружності доводиться проводити однотипні операції для формування матриць жорсткості та теплопровідності. При рішенні нелінійних задач за модифікованим методом Ньютона-Канторовича на певних ітераціях доводиться також перераховувати матриці жорсткості з урахуванням геометрії деформованого тіла [5].

Метою роботи є розробка методики паралельних обчислень розрахункових матриць скінчених елементів для задач термопружності.

Виклад основного матеріалу. Формулювання задачі термопружності у варіаційні формі має вигляд

$$\iiint_V \delta F dv - \iiint_V \boldsymbol{P}\delta\boldsymbol{u} - \iint_S \boldsymbol{Q} d\boldsymbol{u} = 0\,, \qquad (1)$$

де F – вільна енергія; ***P, Q***– вектори об'ємних і поверхневих навантажень; u – вектор переміщень.

Для розв'язання задачі пружності необхідно знайти розв'язок задачі теплопровідності

$$\iiint_V c_\varepsilon (T-T_0)\delta T dv + \iiint_V \beta^{ij}(T-T_0)\delta\varepsilon_{ij} dv =$$
$$= \iiint_V \lambda^{ij} T_{,i}\delta T_{,j} dv + \iiint_V w_0 \delta T dv + \iint_S \left[q + h(T-\theta)\right]\delta T ds\,, \qquad (2)$$

де c_ε – теплоємність при постійній деформації; β^{ij} – компоненти тензору ізотермічних пружних постійних, які визначають взаємний вплив температурного поля і поля деформацій; ε_{ij} – компоненти тензору деформацій; λ^{ij} – компоненти тензору теплопровідності; w_0 – густина внутрішніх джерел теплоутворення; q – тепловий потік; h – коефіцієнт теплообміну; θ – температура навколишнього середовища.

Рівняння (1), (2) фактично є зв'язаною задачею термопружності за наявності впливу температури тіла на фізико-механічні параметри, що притаманно більшості полімерних та композиційних матеріалів.

Розглянемо побудову матриць жорсткості та теплопровідності скінченного елемента з апроксимацією переміщень на основі моментної схеми скінченних елементів.

Введемо до розгляду глобальну декартову систему координат z_i. Для описання властивостей скінченного елементу розглянемо місцеву систему координат x_i, в якій координати точок скінченного елементу лежать межах від -1 до +1. Переміщення та температуру тіла довільних точок скінченного елементу апроксимуємо у вигляді розкладання по степеневим функціям [5]:

$$u_k = \sum_{p=1}^{M}\sum_{q=1}^{N}\sum_{r=1}^{L} \omega_k^{(pqr)} \psi^{(pqr)}\,,$$
$$T = \sum_{p=1}^{M}\sum_{q=1}^{N}\sum_{r=1}^{L} \gamma^{(pqr)} \psi^{(pqr)}\,, \qquad (3)$$

де ω_k ,.γ- коефіцієнти розкладання, $\psi^{(pqr)}$ - набір степеневих функцій виду:

$$\psi^{(pqr)} = \left(x_1^p x_2^q x_3^r\right) / \left(p!q!r!\right),$$

де (p=0,1,2,3; q=0,1,2,3; r=0,1,2,3) - степені апроксимації за відповідними напрямами координат.

Для обраного типу скінченного елемента встановлюється відповідний зв'язок між вузловими значеннями функції та коефіцієнтами розкладання (3). Використання базових степеневих функцій дозволяє апроксимувати переміщення та деформації у вигляді розкладання аналогічно (3) [5].

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{p=1}^{M}\sum_{q=1}^{N}\sum_{r=1}^{L} e_{ij}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}\,. \qquad (4)$$

Серед коефіцієнтів розкладання компонентів тензору деформацій в ряд Маклорена утримуються лише ті, що відповідають апроксимації переміщень.

Використання співвідношень моментної схеми скінченних елементів дозволяє уникнути ефектів «хибного зсуву».

Для формування матриці жорсткості скінченного елементу використовуються співвідношення варіації енергії пружної деформації у вигляді:

$$\delta W = \int_V \sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij} dv\,. \qquad (4)$$

Компоненти тензора пружних напружень приймаємо у вигляді закону Гука:

$$\sigma^{ij} = 2\mu g^{ik} g^{jl}\varepsilon_{ij} + \lambda\theta g^{ij}\,, \qquad (5)$$

де μ, λ - коефіцієнти Ляме; g^{ij} - компоненти метричного тензора; θ - функція зміни об'єму.

Функцію змінення об'єму також можна представити у вигляді розкладання по степеневим функціям

$$\theta = \sum_{p=1}^{M}\sum_{q=1}^{N}\sum_{r=1}^{L}\xi^{(pqr)}\psi^{(pqr)} .$$

Тоді варіація енергії пружної деформації має вигляд

$$\delta W = \{\delta u\}^T \left[G + G_\theta\right]\{u\}, \quad (6)$$

де $G = \iiint\limits_V [A]\{\psi\} 2\mu g^{ik} g^{jl} \{\psi\}^T [A]^T \, dv$, (7)

$$G_\theta = \iiint\limits_V [B]\{\psi\} \lambda g^{ij} \{\psi\}^T [B]^T \, dv . \quad (8)$$

Матриці A і B обчислюються для вузлів інтегрування. За аналогічною схемою будується матриця теплопровідності. Варіаційне рівняння для стаціонарної теплопровідності має вигляд

$$\delta W_T = \int\limits_V \left(w_o \delta T + \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial \delta T}{\partial \xi_j} \right) dv + \int\limits_{S_1} q \delta T ds +$$
$$+ \int\limits_{S_2} h(T - \theta)\delta T ds = 0 , \quad (9)$$

Враховуючи апроксимацію температури по об'єму скінченного елемента рівняння (9) має вигляд

$$\delta W_T = \{\delta T\}^T [H]\{T\} + \{\delta T\}^T \left[R^{(s_2 t_2)}\right]\{T\} +$$
$$+ \{\delta T\}^T \{P\} + \{\delta T\}^T \{S\} = 0 , \quad (10)$$

де $H = \iiint\limits_V [C]\{\psi_{,i} T\} \lambda_{ij} \{\psi_{,j}\}^T [C]^T \sqrt{g} dv$. (11)

Обчислення інтегралів що входять в рівняння (7), (8), (11) можна виконати за однаковою схемою.

Результати досліджень. Для паралельного обчислення використано бібліотеку OpenMP оскільки при побудові матриць спільно використовуються масиви даних.

OpenMP — це модель програмування спільної пам'яті, яка підтримує мультиплатформене багатопроцесорне програмування спільної пам'яті на мовах програмування C, C++ і Fortran, доступна для широкого спектру архітектур процесорів і операційних систем. Бібліотека OpenMP складається з набору директив компілятора, підпрограм бібліотеки та змінних середовища, які впливають на поведінку під час виконання.

Програмування в OpenMP полягає у використанні так званих паралельних конструкцій (директив компілятора), які вставляються у вихідний код, інструктуючи компілятор генерувати певний код. OpenMP визначає різні конструкції, що дозволяють розпаралелювати послідовний код і синхронізувати окремі потоки.

Щоб зменшити деталізацію проблеми та зменшити накладні витрати, пов'язані зі створенням і завершенням потоку, зазвичай розпаралелюють крайні цикли в алгоритмі, що в нашому конкретному випадку відповідає розпаралелюванню циклу над елементами в операції збирання. На рис. 1 представлено блок-схему паралельного алгоритму OpenMP.

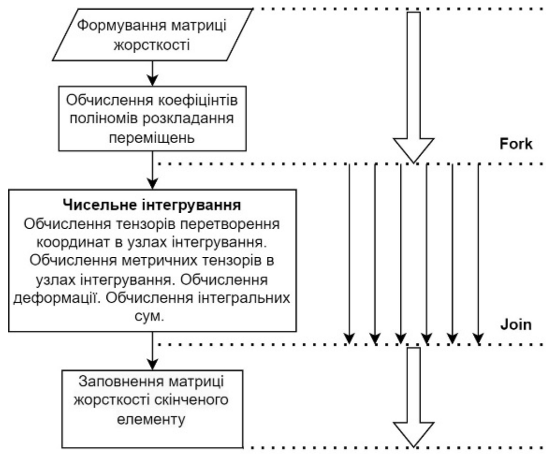

Рис. 1. Блок-схема паралельного алгоритму чисельного Інтегрування

На основі розробленого підходу проведено розрахунок шини під внутрішнім тиском 600кПа. Радіальне навантаження 80кПа. Швидкість кочення складає 50км/год. Обраховані поля переміщень, напружень та температури дисипативного розігріву [7]. На рис.2 представлено порівняння часу обрахунку з використанням запропонованого підходу до обчислення матриць жорсткості і теплопровідності та з використанням традиційного підходу.

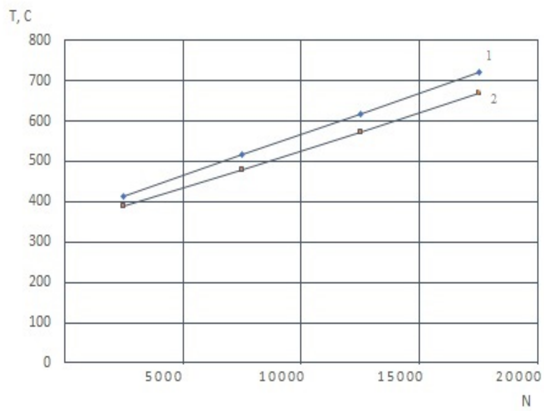

Рис. 2. Час розв'язку для різної кількості вузлів:
1 – традиційна схема;
2 – схема з паралельними обчисленнями.

Для розрахунку використано обчислювальний комплекс «МІРЕЛА+» із застосуванням паралельних обчислень матриць скінченного елементу. Тестування виконувалось на пристрої з Intel i7-9750H (6 ядер та 12 потоків) та 16 ГБ RAM.

Висновки. Розроблена методика формування матриць жорсткості та теплопровідності на основі використання паралельних обчислень інтегральних квадратурних складників дозволяє прискорити процес розв’язування задач механіки конструкцій. Скорочення часу розв’язання складає 7%. Використання бібліотеки OpenMP в пакеті прикладних програм «МІРЕЛА+» підвищує ефективність розрахунків.

Л і т е р а т у р а

1. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Термомеханика неупругих тонкостенных элементов конструкций с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при гармоническом нагружении. *Прикладная механика*. 2017. Т. 53, № 1. С. 9 – 74.
2. Киричок И. Ф. Радиальные колебания и виброразогрев вязкоупругих оболочечных элементов и их демпфирование пьезоэлектрическими сенсором и актуатором. *Прикладная механиа*. 2016. 52, №4. С. 30 – 36.
3. Моделювання нелінійного деформування ортотропних циліндричних оболонок з отвором при врахуванні ексцентриситету його підкріплення / І. С. Чернишенко та ін. *Доповіді Національної академії наук України.* 2016. №1. С. 35 – 39.
4. Bazhenov V.A., Kozub Yu.G., Solodei I.I. Thermoelasticity of elastomeric constructions with initial stresses. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2020. Issue 104. Pp. 299 – 308.
5. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+» / В. Киричевский та ін.; ред. В. Киричевский. Київ: Наук. думка., 2005. 402с.
6. Kozub Y. G. The durability of construction elements manufactured from low-compressibility elastomers. *International Polymer Science and Technology*. 2014.Vol. 41, No. 7. Pp. T/21 – T/25.
7. Жданов А.И., Богданова Е.Ю. Об одной вычислительной реализации блочного метода Гаусса-Зейделя. *Вестн. Сам.гос. тех.ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2016. Т.20, №4. С. 730 – 738.
8. Попов А.В. Параллельные алгоритмы решения линейных систем с разреженными симметричными матрицами. *Проблеми програмування.* 2008. № 2-3. С. 111 – 118.
9. Jarzebski P., Wisniewski K., Taylor R. L. On parallelization of the loop over elements in FEAP. *Computijnal Mechanics,* 2015. 56. Pp.77–86.
10. Ju S.H., Hsu H.H. An Out-of-Core Eigen-Solver with OpenMP Parallel Scheme for Large Spare Damped System. *Int. J.Computational Methods.* 2019. Vol. 16. No. 7. URL:https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219876219500385.
11. Bošanský M., Patzák B. Parallelization of assembly operation in finite element method. *Acta Polytechnica.* 2020. 60(1). Pp.25–37.
12. Wozniak M., Bukowska A. Comparison of multi-frontal and alternating direction parallel hybrid memory igrm direct solver for non-stationary simulations *Computer Science*. 2020. 21(4). Pp. 419-439
13. Yamaguchi T., Kawase Y., Nagase A., Ishimura S. Performance Evaluation of 3-D Hybrid Parallel Finite Element Method by MPI/OpenMP *J. Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 2019. Vol.27. No.1. Pp.85-90.
14. Amorim L., Goveia T., Mesquita R., Baratta I. GPU Finite Element Method Computation Strategy Without Mesh Coloring *J. Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, 2020. Vol. 19. No.2. Pp. 252-264.
15. Atallah A.M., Younes A.B. Parallel Evaluation of Chebyshev Approximations :Applications in Astrodynamics *J. Astro-nautical Science*. 2022. Vol. 69. Pp. 692–717.

R e f e r e n c e s

1. Karnaukhov V. H., Kyrychok Y. F., Kozlov V. Y. (2017) Termomekhanyka neupruhykh tonkostennыkh эlementov kons-truktsyi s pezoэlektrycheskymy sensoramy y aktuatoramy pry harmonycheskom nahruzhenyy [Thermomechanics of inelastic thin-walled structural elements with piezoelectric sensors and actuators under harmonic loading] *Prykladnaia mekhanyka*, 1, 9 – 74. [in Russian].
2. Kyrychok Y. F. (2016) Radyalnyie kolebanyia y vybrorazohrev viazkoupruhykh obolochechnykh elementov y ykh demp-fyrovanye pezoelektrycheskymy sensorom y aktuatorom [Radial oscillations and vibro-heating of viscoelastic shell elements and their damping by piezoelectric sensor and actuator] *Prykladnaia mekhanyka,* 4, 30 – 36. [in Russian].
3. Chernyshenko I.S., Komarchuk S.M. Maksumiuk V.A. and Storozhuk E.A. (2016) Modeliuvannia neliniinoho deformuvannia orto-tropnykh tsylindrychnykh obolonok z otvorom pry vrakhuvanni ekstsentrysytetu yoho pidkriplennia [Modeling of nonlinear deformation of orthotropic cylindrical shells with a hole, taking into account the eccentricity of its reinforcement] *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy,* 1, 35 – 39. [in Ukranian].
4. Bazhenov V.A., Kozub Yu.G., Solodei I.I. (2020) Thermoelasticity of elastomeric constructions with initial stresses. *Strength of Materials and Theory of Structures,* 104. 299-308.
5. Kirichevskii V.V., Dokhniak B.M., Kozub Yu.H., Homeniuk S.I., Kirichevskii R.V., Grebeniuk S.N. (2005) *Metod konechnykh elementov v vychyslytelnom komplekse «MIRELA+»* [Finite element method in the computer complex "MIRELA +"] Kyiv: Naukova dumka [in Russian].
6. Kozub Y. G. (2014) The durability of construction elements manufactured from low-compressibility elastomers. *International Polymer Science and Technology*, 7, 21 – 25. [in English].
7. Zhdanov A.Y., Bohdanova E.Iu. (2016) Ob odnoi vychysly-telnoi realyzatsyy blochnoho metoda Haussa-Zeidelia [On one computational implementation of the block Gauss-Seidel method] *Vestnik. Samarskogo. gos. tekh.un-ta. Ser. Fyz.-mat. Nauky,* Vol.20, 4, 730-738.[in Russian].
8. Popov A.V. (2008) Parallelnye alhorytmy reshenyia lyneinykh system s razrezhennymy symmetrychnymy matry-tsamy [Parallel algorithms for solving linear systems with sparse symmetric matrices] *Problemy prohramuvannia,* 2-3, 111-118. [in Russian].
9. P. Jarzebski, K. Wisniewski and R. L. Taylor. (2015) On parallelization o.f the loop over elements in FEAP. *Computijnal Mechanics.* 56, 77–86.

10. S. H. Ju and H. H. Hsu (2019) An Out-of-Core Eigen-Solver with OpenMP Parallel Scheme for Large Spare Damped System. *Int. J.Computational Methods,* Vol. 16, 7. URL:https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219876219500385 .
11. Michal Bozhanskii and Borek Patziak (2020) Parallelization of assembly operation in finite element method. *Acta Polytechnica,*. 60(1), 25–37.
12. Maciej Wozniak, Anna Bukowska (2020) Comparison of multi-frontal and alternating direction parallel hybrid memory igrm direct solver for non-stationary simulations *Computer Science,* 21(4), 419-439.
13. Tadashi Yamaguchi, Yoshihiro Kawase, Atsuyoshi Nagase and Shota Ishimura (2019) Performance Evaluation of 3-D Hybrid Parallel Finite Element Method by MPI/OpenMP *J. Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics,* 1, 85-90.
14. Lucas Amorim, Thiago Goveia, Renato Mesquita and Igor Baratta (2020) GPU Finite Element Method Computation Strategy Without Mesh Coloring *J. Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications,* Vol. 19, 2, 252-264.
15. Ahmed M. Atallah and Ahmad Bani Younes (2022) Parallel Evaluation of Chebyshev Approximations: Applications in Astrodynamics *J. Astro-nautical Science,* 69, 692–717.

Homeniuk S.I., Kozub V.Yu. Parallel implementation of the finite element method for the thermoelasticity problem

The article examines design calculations of constructions that require a comprehensive analysis of deformation processes under the action of operational loads. In real operating conditions, most structural elements are under the influence of mechanical and thermal loads. To analyze deformation processes, it is necessary to solve the problem of thermoelasticity. To solve such problems, the finite element method is usually used, the accuracy of which depends on the number of calculation nodes. One of the stages of solving problems of thermal elasticity is the formation of matrices of stiffness and thermal conductivity of finite elements. Moreover, for elements of the same type, calculations according to the same procedure are used, and the number of such calculations determines the time of solving the problem. In the traditional approach, these calculations are performed sequentially. In the case of large grid sizes, the number and time of calculations increase, which requires optimization of calculations using parallel calculation algorithms. The parallelization of the finite element method requires the management of the work of a sufficiently large number of processes, as well as the arrangement of data exchange between processes. The execution time of parallel calculations is determined by the slowest subtask. When forming the stiffness and thermal conductivity matrices, it is necessary to perform integration over the area of the finite element. Using the moment scheme of finite elements, displacement and deformation are approximated by the same polynomials, which simplifies the calculation of integrals. This procedure ends with the formation of a stiffness matrix block, and this block is partially shared by neighboring finite elements. In a shared memory system, information is exchanged between processors using variables stored in shared memory. Parallel programming algorithms have been developed for constructing stiffness matrices of finite elements and calculating the stress-strain state for the "MIRELA+" program package. Solutions for calculation grids of different sizes were obtained. The effect of parallelization on the calculation time was studied.

Keywords: *finite element method, stiffness matrix, parallel computing, OpenMP, stress-strain state.*

Гоменюк Сергій Іванович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету, (м. Запоріжжя), mf@znu.edu.ua.

Козуб Владислав Юрійович – асистент кафедри фізико-технічних систем та інформатики Луганського національного університету імені Тараса Шевченка, (м. Полтава), v.y.kozub@gmail.com.

Стаття подана 15.10.2022.