

DOI: <https://doi.org/10.33216/1998-7927-2023-277-1-38-42>

УДК 62-83

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АСИНХРОННОЇ МАШИНИ У КООРДИНАТНІЙ СИСТЕМІ, ОСІ ЯКОЇ "КОЛИВАЮТЬСЯ" У ПРОСТОРІ

Руднєв Є.С., Романченко Ю.А., Яцуміра А.А., Мелконова І.В.

## MATHEMATICAL MODEL OF THE ASYNCHRONOUS MACHINE IN THE COORDINATE SYSTEM WHERE THE AXES "OSCILLATE" IN SPACE

Rudniev Y.S., Romanchenko J.A., Yatsumira A.A., Melkonova I.V.

*В статті представлений аналіз математичної моделі асинхронної машини у координатній системі, осі якої "коливаються" у просторі. Показано, що диференціальні рівняння, які описують процеси у реальній трифазній асинхронній машині, містять періодичні коефіцієнти. Останні ускладнюють рішення таких рівнянь і вимагають пошук підходів, що дозволяють одержати рівняння зі сталими коефіцієнтами.*

*Показано, що у повністю керованій асинхронній машині регульованими і незалежними параметрами є і величина, і фаза додаткової електрорушійної сили, а у асинхронно вентильному каскаді, який може розглядатися як машина подвійного живлення з обмеженими можливостями керування, незалежним параметром є тільки величина вектора додаткової електрорушійної сили, а його фаза детермінована: проти-е.р.с., що вводиться у коло випрямленого струму ротора, завжди знаходиться у протифазі з вектором струму ротора.*

*Встановлено, що вирішення задачі спрощується введенням нової координатної системи, у якій осі обертаються у просторі не зі сталою швидкістю, а зі змінною, що є певною функцією часу. Суть перетворень, пов'язаних з переходом до нової системи координат полягає в знаходженні такої функції, що дозволяє у площині цих координат умовно розглядати нерухомим той вектор, параметри якого є визначальними для даної системи. Знаходять її, виходячи з умови, щоб позитивний напрямок дійсної осі системи завжди співпадав з вектором, по відношенню до якого розглядається стан асинхронної машини.*

*Наведено диференціальні рівняння машини подвійного живлення в осях "g-i" у векторній формі. Показано, що ці рівняння справедливі як для двигуна з короткозамкненим ротором, так і для будь-якої системи асинхронного електропривода, регулювання швидко-*

*сті якого реалізується через введення додаткової е.р.с. у роторне коло.*

*Виведено рівняння початкової кутової швидкості векторів струмів та потокозчеплень у просторі відносно нерухомого статора при нульових початкових умовах незалежно від ковзання ротора для асинхронної машини з короткозамкненим ротором. Наведені перехідні процеси пуску асинхронної машини з короткозамкненим ротором.*

**Ключові слова:** асинхронна машина, електрорушійна сила, ротор, статор, вектор струму, координатна система, короткозамкнений ротор.

**Вступ.** Диференціальні рівняння, що описують процеси у реальній трифазній асинхронній машині (АМ), містять періодичні коефіцієнти [1]. Останні ускладнюють рішення таких рівнянь і вимагають пошук підходів, що дозволяють одержати рівняння зі сталими коефіцієнтами. Один з таких напрямків – це заміна змінних, тобто введення перетворених координат АМ. Якщо періодичні коефіцієнти зникають, то це означає, що ротор "нової" АМ нерухомий відносно статора, оскільки періодичність пов'язана як раз з обертанням ротора.

Цей підхід найбільш ефективний при аналізі процесів у випадку живлення машини як зі сторони статора, так і ротора (машина подвійного живлення, асинхронний вентильний каскад). Але він може бути використаний і для інших схем вмикання, наприклад, для АМ з короткозамкненим ротором (к.з.р.). Для цього достатньо прийняти напругу, що підводиться до роторних обмоток, рівною нулю.

**Мета статті.** Представлення та аналіз математичної моделі асинхронної машини у координатній системі, осі якої "коливаються" у просторі.

**Результати дослідження.** Якщо у повністю керованій асинхронній машині регульованими і незалежними параметрами є і величина, і фаза додаткової електрорушійної сили (е.р.с.), то у асинхронно вентильному каскаді (АВК), який може розглядатися як машина подвійного живлення з обмеженими можливостями керування, незалежним параметром є тільки величина вектора додаткової е.р.с.  $u_2$ , в той час, як його фаза детермінована: проти-е.р.с.  $e_d$ , що вводиться у коло випрямленого струму ротора, завжди знаходиться у протифазі з вектором струму ротора [2].

Коли вектор струму  $\vec{i}_2$  змінюється за фазою, що має місце як при змінній швидкості, так і при змінній навантаженні, вектор  $\vec{u}_2$  повертається, слідкуючи за вектором  $\vec{i}_2$ . Таким чином, у цих випадках спостерігається функціональна залежність фази додаткової е.р.с. не тільки від ковзання, але і від амплітуди струму ротора. Наявність такої залежності суттєво ускладнює математичний опис перехідних процесів.

Вирішення задачі спрощується введенням нової координатної системи, у якій осі обертаються у просторі не зі сталою швидкістю, а зі змінною, що є певною функцією часу. Суть перетворень, пов'язаних з переходом до нової системи координат полягає в знаходженні такої функції  $\omega_\alpha = f(t)$ , що дозволяє у площині цих координат умовно розглядати нерухомим той вектор, параметри якого є визначальними для даної системи. Онищенко Г.Б. та Локтева І.Л. [2] пропонують знаходити її, виходячи з умови, щоб позитивний напрямок дійсної осі системи завжди співпадав з вектором, по відношенню до якого розглядається стан АМ. В такому випадку осі координат повинні здійснювати два рухи: обертовий зі швидкістю  $\omega_{0e}$  і складний з кутовою швидкістю  $d\delta/dt$  відносно синхронної системи. Таку координатну систему вони пропонують називати системою ортогональних координат ("g – i"), що коливаються у просторі.

Відносно нерухомих обмоток статора, швидкість  $\omega_g$  осей "g–i" дорівнює:

$$\omega_g = \omega_{0e} - d\delta / dt, \quad (1)$$

а відносно ротора

$$\omega_{gs} = \omega_{0e}s - d\delta / dt, \quad (2)$$

де  $\delta$  – кут між вектором первинної напруги  $\vec{u}_1$ , що обертається з синхронною швидкістю  $\omega_{0e}$ , та вектором змінної, напрямок якого прийнято за напрямок осі g.

Зв'язок між змінними  $x$  в нерухомій системі координат  $\alpha$ – $\beta$  та перетворених у коливальній системі "g–i" такий:

$$\left. \begin{aligned} x_\alpha &= x_g \cos(\omega_{0e} - \delta); \\ x_\beta &= x_g \sin(\omega_{0e} - \delta), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

де  $\delta = f(x_g, t)$ .

Зауважимо, що вектор, за яким орієнтується система, цілком проєктується на вісь g, тому  $x_g = |x|$ . Тож проєкція опорного вектора на вісь і:  $x_i = 0$ , тому в (3) складові від проєкцій  $x_i$  на осі "α–β" відсутні.

Тоді диференційні рівняння машини подвійного живлення в осях "g–i", у векторній формі будуть мати вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{d\vec{\Psi}_1}{dt} + j\omega_g \vec{\Psi}_1 + \vec{i}_1 r_s; \\ \vec{u}_2 &= \frac{d\vec{\Psi}_2}{dt} + j\omega_{gs} \vec{\Psi}_2 + \vec{i}_2 r_r; \\ M &= \frac{3}{2} p_n \frac{L_m}{L_s L_r - L_m^2} \text{Im}(\vec{\Psi}_1 \cdot \vec{\Psi}_2^*), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

де  $L_s, L_r, L_m$  – власні індуктивності обмоток статора, ротора та намагнічувального контуру АМ відповідно.

$I_m$  означає уявну частину від добутку векторів первинного  $\vec{\Psi}_1$  (статора) та сполучного вторинного  $\vec{\Psi}_2^*$  (ротора) поточкозчеплень відповідно.

Ці рівняння справедливі як для двигуна з к.з.р. ( $\vec{u}_2 = 0$ ), так і для будь-якої системи асинхронного електропривода, регулювання швидкості якого реалізується через введення додаткової е.р.с. у роторне коло.

Для АВК визначальним є вектор струму ротора  $\vec{i}_2$ , тому його поєднують з віссю g. Тоді  $\delta$  буде кутом між вектором  $\vec{i}_2$  та вектором  $-\vec{u}_1$ . Тому:

$$\begin{aligned}\bar{u}_2 &= -|\bar{u}_2| e^{-j0} = \left( E_g + L_d \frac{d|\bar{i}_2|}{dt} \right) e^{-j0}; \\ \bar{i}_2 &= i_{g2} = i_2; \\ \bar{u}_1 &= U_{m1} e^{-j(\pi-\delta)},\end{aligned}\quad (5)$$

де  $L_d$  – величина індуктивності кола випрямленого струму ротора.

Тоді (4) можна подати так [3]:

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= L_s \frac{d\bar{i}_1}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_2}{dt} + j\omega_g L_s \bar{i}_1 + j\omega_g L_m \bar{i}_2 + r_s \bar{i}_1; \\ -\left( E_g + L_d \frac{d\bar{i}_2}{dt} \right) &= L_r \frac{d\bar{i}_2}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_1}{dt} + j\omega_{gs} L_r \bar{i}_2 + \\ &+ j\omega_{gs} L_m \bar{i}_1 + r_r \bar{i}_2; \\ M_e &= \frac{3}{2} p_n L_m \operatorname{Im}(\bar{i}_1 \cdot \bar{i}_2^*),\end{aligned}\quad (6)$$

Рішення відносно  $\bar{i}_2$  має вигляд:

$$\begin{aligned}j \frac{d^2 \bar{i}_2}{dt^2} \sigma_1 + \frac{d\bar{i}_2}{dt} \left[ \sigma_1 (\omega_g + \omega_{gs}) + j(k_1 + k_2) \right] + \\ + \bar{i}_2 \left\{ \left[ -\sigma_1 \frac{d\omega_g}{dt} + k_1 \omega_g + k_2 \omega_{gs} \right] + j \left[ k_2 - \sigma_1 \omega_g \omega_{gs} \right] \right\} + \\ + \bar{u}_2 \left[ -k_4 \omega_g - jk_5 \right] - jk_4 \frac{d\bar{u}_1}{dt} + U_{1m} s (-\cos \delta + j \sin \delta) = 0,\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\text{де } \sigma_1 &= \frac{L_s L_r - L_m^2}{\omega_{0e} L_m}; \quad k_1 = \frac{L_s r_r}{\omega_{0e} L_m}; \quad k_2 = \frac{L_r r_s}{\omega_{0e} L_m}; \\ k_3 &= \frac{r_s r_r}{\omega_{0e} L_m}; \quad k_4 = \frac{L_s}{\omega_{0e} L_m}; \quad k_5 = \frac{r_s}{\omega_{0e} L_m}.\end{aligned}$$

Швидкість обертання вектора струму  $d\delta/dt$  відносно вектора напруги  $\bar{u}_1$ , а значить  $\omega_g$  і  $\omega_{gs}$ , у початковий момент часу можуть бути знайдені з (7):

$$\left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{t=0} = \frac{L_m f_1 - L_s f_2}{\sigma i_2(0)},\quad (8)$$

$$\begin{aligned}f_1 &= -U_{m1} \sin \delta(0) - L_s \omega_{0e} i_1(0) - L_m \omega_{0e} i_2(0) - r_s i_1(0); \\ f_2 &= -[L_m i_1(0) + L_r i_2(0)] \omega_{0e} s.\end{aligned}$$

При нульових початкових умовах з (6) маємо, що у початковий момент часу узагальнені вектори магнітного потоку в зазорі АМ, а також потокозчеплень статора і ротора направлені по осі "g" координатної системи "g-i" (або протилежні осі "g"), швидкість же їх обертання при  $t = 0$  дорівнює швидкості вектора струму ротора [4-6].

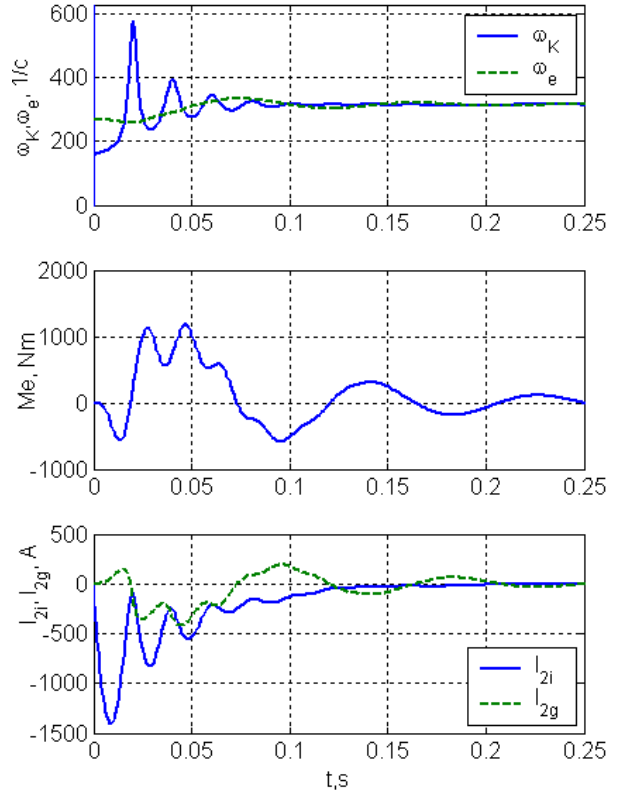


Рис. Перехідний процес пуску АМ з к.з.р. при  $\omega(0) = 0,85\omega_0$ :

- 1 – кутова швидкість обертання потокозчеплення статора  $\omega_k$  та електрична швидкість обертання ротора  $\omega_e$ ;
- 2 – крива електромагнітного моменту  $M_e(t)$ ;
- 3 – криві проєкцій струму ротора  $i_{2g}(t)$ ,  $i_{2i}(t)$

З (8) видно, що для АМ з к.з.р. ( $u_2 = 0$ ) початкова кутова швидкість векторів струмів та потокозчеплень у просторі відносно нерухомого статора при нульових початкових умовах незалежно від ковзання ротора дорівнює:

$$\omega_g(0) = 0,5 \omega_{0e},\quad (9)$$

що і спостерігаємо на рисунку 1 – кутова швидкість обертання потокозчеплення статора  $\omega_k$  в початковий момент часу  $\omega_k(0) = 157 \text{ c}^{-1}$ , а її усталене значення відповідає синхронній  $\omega_k = \omega_{0e} = 314,15 \text{ c}^{-1}$ .

Це є поясненням того факту, що при  $s < 0,5$  ( $\omega > 0,5\omega_0$ ), коли швидкість ротора двигуна при вмиканні більша швидкості вектора потокозчеплення статора, АМ попадає в режим рекуперативного гальмування – спостерігається негативне значення піку електромагнітного моменту в його кривій (див. рис. 1). На рисунку показані процеси підключення до мережі живлення аси-

нхронної машини 4A250S4 при початковій швидкості 85% від синхронної. Параметри машини наведені в [1].

**Висновки.** Використання координатної системи "g-i" дозволяє на початковому інтервалі перехідного процесу відразу визначити (аналітично) величину та фазу вектора струму ротора і перпендикулярну йому складову вектора потоку  $L_m i_{\nu}$ , взаємодія яких генерує електромагнітний момент АМ.

### Література

1. Шевченко І.С., Морозов Д.І. Електромеханічні процеси в асинхронному електроприводі: навчальний посібник. Алчевськ: ДонДТУ. 2009. 349 с.
2. Онищенко Г.Б., Локтева И.Л. Метод колеблющихся координат в исследовании электромагнитных переходных процессов асинхронных электроприводов / Автоматизированный электропривод в промышленности. Труды VI Всесоюзной конф. по автоматизированному электроприводу. Под общ. ред. М.Г. Чиликина, И.И. Петрова, М.М. Соколова, М.Г. Юнькова. Москва: Энергия. 1974. С. 68-71.
3. Сандлер А.С., Тарасенко Л.М. Динамика каскадных асинхронных электроприводов. Москва: Энергия, 1977. 200 с.
4. Чорний О. П., Толочко О. І., Титюк В. К., Родькін Д. Й., Чекавський Г.С. Математичні моделі та особливості чисельних розрахунків динаміки електроприводів з асинхронними двигунами: монографія. Кременчук, 2016. 302 с.
5. Rudniev, Y., Romanchenko, J., Romanchenko, O. Study of Impact Phenomenon in Mechatronic Systems. Proceedings of the 2022 IEEE 4th International Conference on Modern Electrical and Energy System, MEES 2022, 2022. P.1-6.
6. Rudnjev J., Shevchenko I., Romanchenko J. Mathematical model of an asynchronous machine in real coordinates of state. Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. 5 (269). С. 24-28.

### References

1. Shevchenko I.S., Morozov D.I. Elektromehanični procesy v asinhronnomu elektropyvodi: navchal'nyj posibnyk. Alchevs'k: DonDTU. 2009. 349 s.
2. Onishhenko G.B., Lokteva I.L. Metod kolebljushhihsja koordinat v issledovanii

- jelektromagnitnyh perehodnyh processov asinhronnyh jelektroprivodov / Avtomatizirovannyj jelektroprivod v promyshlennosti. Trudy VI Vsesojuznoj konf. po avtomatizirovannomu jelektroprivodu. Pod obshh. red. M.G. Chilikina, I.I. Petrova, M.M. Sokolova, M.G. Jun'kova. Moskva: Jenergija. 1974. S. 68-71.
3. Sandler A.S., Tarasenko L.M. Dinamika kaskadnyh asinhronnyh jelektroprivodov. Moskva: Jenergija, 1977. 200 s.
  4. Chornyj O. P., Tolochko O. I., Tytjuk V. K., Rod'kin D. J., Chekavs'kyj G.S. Matematychni modeli ta osoblyvosti chysel'nyh rozrahunkiv dynamiky elektropyvodi v asinhronnymy dyvgunamy: monografija. Kremenchuk, 2016. 302 s.
  5. Rudniev, Y., Romanchenko, J., Romanchenko, O. Study of Impact Phenomenon in Mechatronic Systems. Proceedings of the 2022 IEEE 4th International Conference on Modern Electrical and Energy System, MEES 2022, 2022. P.1-6.
  6. Rudnjev J., Shevchenko I., Romanchenko J. Mathematical model of an asynchronous machine in real coordinates of state. Visnyk Shidnoukrai'ns'kogo nacional'nogo universytetu imeni Volodymyra Dalja. 5 (269). S. 24-28.

**Rudniev Y., Romanchenko J., Yatsumira A., Melkonova I. Mathematical model of the asynchronous machine in the coordinate system where the axes "oscillate" in space.**

*The article presents an analysis of the mathematical model of an asynchronous machine in a coordinate system, the axes of which "oscillate" in space. It is shown that the differential equations describing the processes in a real three-phase asynchronous machine contain periodic coefficients. The latter complicate the solution of such equations and require the search for approaches that make it possible to obtain an equation with constant coefficients.*

*It is shown that in a fully controlled asynchronous machine, both the magnitude and the phase of the additional electromotive force are adjustable and independent parameters, and in an asynchronously valve cascade, which can be considered as a dual-feed machine with limited control capabilities, only the magnitude of the additional electromotive force vector is an independent parameter; and its phase is determined: the counter-emf, which is introduced into the circuit of the rectified current of the rotor, is always in antiphase with the rotor current vector.*

*It has been established that the solution of the problem is simplified by the introduction of a new coordinate system, in which the axes rotate in space not at a constant speed, but with a variable that is a certain*

function of time. The essence of the transformations associated with the transition to a new coordinate system is to find such a function that allows in the plane of these coordinates to conditionally consider the fixed vector, the parameters of which are decisive for the given system. It is found based on the condition that the positive direction of the real axis of the system always coincides with the vector in relation to which the state of the asynchronous machine is considered.

The differential equations of the dual-feed machine in the "g-i" axes are given in vector form. It is shown that these equations are valid both for a motor with a squirrel-cage rotor and for any system of an asynchronous electric drive, the speed of which is controlled by introducing an additional emf. into the rotary chain.

An equation for the initial angular velocity of the vectors of currents and flux linkages in space relative to a fixed stator under zero initial conditions, regardless of the slip of the rotor, is derived for an asynchronous machine with a squirrel-cage rotor. Transient processes of starting an asynchronous machine with a squirrel-cage rotor are given.

**Key words:** asynchronous machine, electromotive force, rotor, stator, current vector, coordinate system, squirrel-cage rotor.

**Руднєв Є.С.** – к.т.н., доц., завідувач кафедри електричної інженерії Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля, [rudnev\\_es@snu.edu.ua](mailto:rudnev_es@snu.edu.ua)

**Романченко Ю.А.** – к.т.н., доц., доцент кафедри електричної інженерії Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля, [romanchenko\\_ja@snu.edu.ua](mailto:romanchenko_ja@snu.edu.ua)

**Яцуміра А.А.** – студентка кафедри електричної інженерії Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля, [mvt-22dm-915@snu.edu.ua](mailto:mvt-22dm-915@snu.edu.ua)

**Мелконова І.В.** – к.т.н., доц., доцент кафедри електричної інженерії Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля, [melkonova@snu.edu.ua](mailto:melkonova@snu.edu.ua)

Стаття подана 22.01.2023.